MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

TIZENHARMADIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

KÖVESLIGETHY RADÓ és RADOS GUSZTÁV

BUDAPEST 1904

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

TIZENHARMADIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

Első füzet.

Második—Harmadik füzet.

Negyedik—Ötödik füzet.

Hatodik füzet.

★

Hetedik—Nyolczadik füzet.

NÉVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ.

Ismertető és önálló dolgozatok.

Irodalom.

Társulati ügyek.

A POINCARÉ ELVÉNEK ALKALMAZÁSA A GAUSS-FÉLE DIFFERENCZIÁLEGYENLET BIZONYOS ESETEINEK INTEGRÁLÁSÁRA.

(Második közlemény.)*

Miután előbbi dolgozatomban a GAUSS-féle differencziálegyenlet független változóját (x) abban a három esetben, melyben a determináló alapegyenletek gyökeinek különbségei:

$$\begin{array}{llll} \text{I.} & \delta_1 = \frac{1}{2}, & \delta_2 = \frac{1}{4}, & \delta_3 = \frac{1}{4} \\ \text{II.} & \delta_1 = \frac{1}{2}, & \delta_2 = \frac{1}{3}, & \delta_3 = \frac{1}{6} \\ \text{III.} & \delta_1 = \frac{1}{3}, & \delta_2 = \frac{1}{3}, & \delta_3 = \frac{1}{3} \end{array}$$

s az integrálhányados

$$\eta = s(\delta_1, \delta_2, \delta_3, x)$$

másodfajú háromszögfüggvény, mint ezen η-nak egyértékű és biperiodikus függvényét előállitottam, most a GAUSS-féle differencziálegyenlet amaz eseteivel fogok foglalkozni, a melyekben a determináló alapegyenletek gyökei oly törtek, melyeknek nevezői a fent felsorolt három esethez tartozó gyökök nevezőivel megegyeznek, számlálói azonban tetszés szerinti egész számok.

POINCARÉ elvének ** értelmében az ily módon keletkező differencziálegyenletek integráljai, melyek különben a független változó-

---

* Az első közlemény a Math. és Phys. Lapok X. (1901) kötetének deczember havi füzetében (357—374. l.) jelent meg a következő czímen: *«A Gauss-féle differencziálegyenlet amaz eseteiről, melyekben a független változó az integrálhányadosnak egyértékű és biperiodikus függvénye»*.

** V. ö. SCHLESINGER: Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. II. 2. (1898), 162. l.

nak többértékű függvényei, a megfelelő esethez tartozó η háromszögfüggvény bevezetésével ennek egyértékű függvényeivé válnak. Ezért meg fogjuk vizsgálni az említett esetekhez tartozó Gauss-féle differencziálegyenletek integráljait, mint η függvényeit, igyekezvén e függvényeket előállítani s meghatározni azokat a substitutiókat, melyek az integrálokat érik, ha η-ra a megfelelő esethez tartozó csoport substitutióit alkalmazzuk.

I. eset.

I.

Ha a Gauss-féle differencziálegyenlet

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)x]\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0$$

singuláris pontjaihoz $(0, 1, \infty)$ tartozó determináló alapegyenletek gyökeinek nevezői: 2, 4, 4; akkor Poincaré elvének értelmében e differencziálegyenletnek integráljai az

$$x(1-x)u''+\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{4}x\right)u'=0 \qquad a)$$

egyenlet* (melyben az alapegyenletek gyökei: $0, \frac{1}{2}$; $0, \frac{1}{4}$; $0, \frac{1}{4}$) integrálhányadosának egyértékű függvényei.

Legyenek a vizsgálandó differencziálegyenlethez tartozó alapegyenletek gyökeinek különbségei: $\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{4}, \frac{a_3}{4}$; azaz:

$$1-\gamma=\frac{a_1}{2},\quad \gamma-\alpha-\beta=\frac{a_2}{4},\quad \alpha-\beta=\frac{a_3}{4},$$

hol a_1, a_2, a_3 egész számokat jelentenek; a gyökök tehát:

$$0 \text{ és } 1-\gamma=\frac{a_1}{2};\quad 0 \text{ és } \gamma-\alpha-\beta=\frac{a_2}{4};$$

$$\alpha=\frac{1}{4}\left(2-a_1-\frac{a_2-a_3}{2}\right) \text{ és } \beta=\frac{1}{4}\left(2-a_1-\frac{a_2+a_3}{2}\right)$$

* L. Math. és Phys. Lapok, X. 358. l.

és így szükséges, hogy a_2+a_3 páros szám legyen, mert az ellenkező esetben az $x=\infty$ singuláris ponthoz tartozó gyökök nevezője 8 volna.

α, β, γ ezen értékeinek helyettesítésével a GAUSS-féle differenczIálegyenlet lesz:

$$x(1-x)y''+\left[1-\frac{a_1}{2}-\left(2-\frac{a_1}{2}-\frac{a_2}{4}\right)x\right]y'-$$

$$-\frac{(4-2a_1-a_2)^2-a_3^2}{64}y=0. \qquad A)$$

Az $a)$ egyenlet független változója az integrálhányadossal a következőképen volt előállítva

$$x=2\,sn^2\eta\,dn^2\eta, \quad k^2=\tfrac{1}{2},$$

s a substitutiók, melyeknek η-ra való alkalmazásánál e függvény nem változik, az

$$S_1=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad S_2=\begin{pmatrix}i & (1-i)K\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

s ezek megfordításaiból alkotható csoport substitutiói.* E substitutiók egyszerűbb alakot öltenek, ha η helyére az $\eta+K$ integrálhányadost irjuk, midőn is ezen új η-val:

$$x=\frac{sn^2\eta}{dn^4\eta} \qquad B)$$

s az ezen függvényt nem változtató substitutiók általános alakja:

$$S=\begin{pmatrix}i^k & m\,.\,2K+n\,.\,2Ki\\ 0 & 1\end{pmatrix}; \quad \begin{array}{l}k=0,\ 1,\ 2,\ 3\\ m,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ldots\end{array}$$

azaz a $B)$ alatti függvény nem változik, ha η a periodusokkal ($2K$, $2Ki$) megváltozik és ha i-vel szorzódik.

Az $A)$ egyenletbe a $B)$ substitutióval vezessük be η-t új független változó gyanánt, akkor — lévén

* L. Math. és Phys. Lapok, X. 359., 361. l.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{dx}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{d\eta^2}\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{d\eta} \cdot \frac{d^2\eta}{dx^2}$$

és

$$\frac{d\eta}{dx} = \pm \frac{dn^5\eta}{sn^3\eta\, cn\,\eta}; \quad \frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{dn^9\eta}{sn^7\eta\, cn^3\eta}(3\, cn^2\eta - \tfrac{1}{2}\, sn^4\eta)$$

— az $A)$ differencziálegyenlet a következőbe megy át:

$$\frac{d^2y}{d\eta^2} + \frac{1}{2}\left[(a_1-1)\frac{sn^3\eta}{cn\,\eta\, dn\,\eta} - 2\,(a_2-1)\frac{cn\,\eta}{sn\,\eta\, dn\,\eta}\right]\frac{dy}{d\eta} -$$
$$- \frac{(4-2a_1-a_2)^2 - a_3^2}{16} \cdot \frac{sn^2\eta}{dn^2\eta}\, y = 0. \qquad C)$$

E differencziálegyenlet együtthatói η-nak $2K$ és $2Ki$ szerint biperiodikus függvényei, a periodusparallelogrammán belül fekvő singuláris pontok: $x=0$-nak megfelelőleg $\eta=K$ és Ki, $x=1$-nek megfelelőleg $\eta=0$, $x=\infty$-nek megfelelőleg $\eta=K+Ki$, mely pontokban $\frac{dy}{d\eta}$ tényezője csak elsőrendűen, y faktora pedig másodrendűen válik végtelenné, ennélfogva ez egy úgynevezett PICARD-féle differencziálegyenlet,* melynek, ha a determináló alapegyenletek gyökei mind egész számok, általánosan szólva mindkét integrálja másodfajú biperiodikus függvény.** Ha azonban az egyik integrál közönséges (elsőfajú) biperiodikus függvény, akkor a második integrál, jobban mondva a két integrálnak hányadosa — feltévén, hogy logarithmus nem lép fel — az η-ból és másodfajú integrálokból lineárisan rakható össze.***

---

* PICARD: Crelle Journal, Bd. 90, pag. 289, squ.

** Másodfajú biperiodikus függvényeknek neveztetnek HERMITE szerint azon függvények, melyek a következő functionalis egyenleteknek tesznek eleget:

$$f(\eta+2K) = \mu_1 f(\eta)$$
$$f(\eta+2K'i) = \mu_2 f(\eta),$$

hol μ_1 és μ_2 állandók. Ily felosztásban a közönséges biperiodikus függvényeket elsőfajúaknak is szokás nevezni.

L. KRAUSE: Doppeltperiodische Functionen (1895), I. 57. l.

*** A PICARD-féle differencziálegyenletek elmélete megtalálható KRAUSE idézett művének második kötetében. A kimondott tételre vonatkozólag a 181. és 259. l. ad felvilágosítást.

A PICARD-féle differencziálegyenlet singuláris pontjai két csoportba oszthatók a szerint, a mint azok az integráloknak is singuláris pontjai vagy nem; az előbbenieket nevezhetjük *tényleges* (wirklich), az utóbbiakat *látszólagos* (scheinbar) singuláris pontoknak. A tényleges singuláris pontok azok, a melyekhez tartozó determináló alapegyenletek gyökeinek legalább egyike negativ, ekkor ugyanis ezen singuláris pontban az általános integrál a negativ gyök által meghatározott fokszámban végtelenné válik. Azon singuláris pontok pedig, a melyekhez csupa pozitiv vagy zérus gyökökkel biró alapegyenletek tartoznak, látszólagos singuláris pontok, mivel ezek az integráloknak polusai nem lehetnek. A másodfajú biperiodikus függvények tulajdonságaira való tekintettel a PICARD-féle differencziálegyenletek másodfajú biperiodikus integráljai tehát ily alakban állíthatók elő:

$$y = e^{\lambda v}\frac{\vartheta_1(v-a_1)\ldots\vartheta_1(v-a_m)}{\vartheta_1(v-b_1)^{m_1}\ldots\vartheta_1(v-b_r)^{m_r}},\quad v=\frac{\eta}{2K},\qquad D)$$

hol $b_1, b_2, \ldots, b_r$ a differencziálegyenlet tényleges singuláris pontjai, $-m_1, -m_2, \ldots, -m_r$ az ezekhez tartozó alapegyenleteknek kisebb negativ gyökei és

$$m_1+m_2+\cdots+m_r=m.$$

Az integrál zérushelyeinek, azaz a constansoknak és a λ-nak meghatározása általában magasabbfokú algebrai egyenletnek megoldását teszi szükségessé.*

A *C)* differencziálegyenlet singuláris pontjaihoz tartozó alapegyenleteknek gyökei:

$$\begin{array}{lll} \eta=K,\ Ki & \text{mellett:} & 0,\ a_1 \\ \eta=0 & « & 0,\ a_2 \\ \eta=K+Ki & « & \dfrac{4-2a_1-a_2-a_3}{2},\ \dfrac{4-2a_1-a_2+a_3}{2}. \end{array}$$

Mivel a_2+a_3 páros, e gyökök mind egész számok s közöttük egy-két trivialis esettől eltekintve, van legalább egy negativ,

* L. KRAUSE: i. m. II. 184. l. s köv.

ennélfogva differencziálegyenletünknek másodfajú biperiodikus integráljai tényleg a *D)* alakban állithatók elő.

II.

Mielőtt a *C)* differencziálegyenlet integráljainak megállapitásához fognék, előbb kimutatom, hogy egyenletünknek általában van legalább egy oly integrálja, mely nemcsak akkor szorzódik egy állandóval, ha η a periodusok egész számú sokszorosaival nő, hanem akkor is, ha η az i-vel szorzódik.

Tegyük fel, hogy a *C)* differencziálegyenletnek az általános elméletnek megfelelőleg volna két másodfajú biperiodikus integrálja s legyen ezen két alaprendszert alkotó integrál $f_1(\eta)$ és $f_2(\eta)$, akkor

$$\left.\begin{array}{l|l} f_1(\eta+2K) = \mu_{11} f_1(\eta) & f_2(\eta+2K) = \mu_{21} f_2(\eta) \\ f_1(\eta+2Ki) = \mu_{12} f_1(\eta) & f_2(\eta+2Ki) = \mu_{22} f_2(\eta) \end{array}\right\} \qquad \text{(I)}$$

Minthogy differencziálegyenletünk nem változik, ha η helyére $i\eta$ lép, ennélfogva az egyenletnek $f_1(i\eta)$ és $f_2(i\eta)$ is integrálja s igy minden esetre léteznek oly constansok, hogy

$$\left.\begin{array}{l} f_1(i\eta) = c_{11} f_1(\eta) + c_{12} f_2(\eta) \\ f_2(i\eta) = c_{21} f_1(\eta) + c_{22} f_2(\eta) \end{array}\right\} \qquad \text{(II)}$$

Tegyünk a (II) egyenletrendszer elsejébe η helyére $(\eta+2K)$-t, akkor az (I) egyenletrendszer felhasználásával kapjuk, hogy egyfelől:

$$\begin{aligned} f_1(i\eta+2Ki) &= c_{11} f_1(\eta+2K) + c_{12} f_2(\eta+2K) \\ &= c_{11}\mu_{11} f_1(\eta) + c_{12}\mu_{21} f_2(\eta), \end{aligned}$$

másfelől:

$$f_1(i\eta+2Ki) = \mu_{12} c_{11} f_1(\eta) + \mu_{12} c_{12} f_2(\eta)$$

s a két alak összehasonlitásából nyerjük, hogy

$$\mu_{11} = \mu_{12} = \mu_{21}.$$

Hasonló eljárással, ha a (II) egyenletek másodikában irunk η helyére $(\eta+2K)$-t, erre az egyenletre jutunk:

$$\mu_{11} = \mu_{21} = \mu_{22},$$

miből látható, hogy a μ állandók mind egymással egyenlők.

S ha végül a (II) egyenletek valamelyikébe η helyére $(\eta+2Ki)$-t teszünk, arra az eredményre jutunk, hogy a μ állandók értéke csak $+1$, vagy -1 lehet, ennélfogva a felvett két integrál függvénytulajdonságai:

$$f_k(\eta+2K) = \pm f_k(\eta)$$
$$f_k(\eta+2Ki) = \pm f_k(\eta)$$
$$(k=1, 2)$$

hol vagy mindenütt a pozitiv, vagy mindenütt a negativ jegy érvényes.

Abból azonban, hogy a fellépő szorzótényezők egyenlők, tekintettel arra, hogy ezen faktorok a közönséges differencziálegyenletek elméletében szereplő fundamentális egyenlethez teljesen hasonló másodfokú egyenletnek tesznek eleget, az következik, hogy általában csak egy másodfajú biperiodikus integrál létezik. Feltevésünk tehát általában ellenmondásra vezet, a mi még a PICARD-féle differencziálegyenletekre vonatkozó fönt említett ama tételből is következik, hogyha az egyik integrál elsőfajú biperiodikus függvény, akkor a vele alaprendszert alkotó integrál általában másodfajú integrálokat tartalmaz; most pedig arra az eredményre jutottunk, hogy mindkét integrál $2K$ és $2Ki$, illetőleg $4K$ és $4Ki$ szerint elsőfajú biperiodikus függvény. Egyes speciális esetekben ez lehetséges, s ha tényleg ily esetek előfordulnak, akkor két oly integrált kapunk, melyek egy állandóval szorzódnak akkor is, ha η helyére $i\eta$ lép. Ugyanis ekkor mindig meghatározható két a és b állandó úgy, hogy az

$$f(\eta) = af_1(\eta) + bf_2(\eta)$$

integrál az

$$f(i\eta) = \nu \, . \, f(\eta)$$

egyenletet is kielégítse, hol ν csakis egy negyedik egységgyök lehet. Ez az egyenlet pedig teljesül, ha

$$ac_{11} + bc_{21} = \nu a$$
$$ac_{12} + bc_{22} = \nu b,$$

mely egyenletekből, ha a rendszer determinánsa eltűnik, az a és b állandók számára két-két értéket kapunk, mivel a determináns nullá tétele ν-re nézve egy másodfokú egyenletet szolgáltat.

Megjegyzendő, hogy a következtetés e módja nem alkalmazható, ha a c állandók valamelyike, pl. c_{11} és c_{22} zérus, mivel a μ-kre vonatkozó egyenletek levezetésénél hallgatólagosan feltételeztük, hogy a c állandók mind zérustól különbözők. Hogy ily esetek, melyekben c_{11} és c_{22} zérus, tényleg előfordulnak, azt később egy példában látni fogjuk.

Térjünk most át arra az általánosabb esetre, midőn differencziálegyenletünknek csak egy másodfajú biperiodikus integrálja van; be fogjuk bizonyítani, hogy ezen integrál akkor is állandóval szorzódik, ha η helyére $i\eta$ lép. Legyen differencziálegyenletünknek másodfajú biperiodikus integrálja $f(\eta)$, egy ezzel alaprendszert alkotó másik integrál pedig legyen $\varphi(\eta)$, akkor mindenesetre léteznek ily relácziók:

$$\begin{aligned} f(\eta+2K) &= \lambda f(\eta) \\ f(\eta+2Ki) &= \mu f(\eta) \\ \varphi(\eta+2K) &= af(\eta)+b\varphi(\eta) \\ \varphi(\eta+2Ki) &= cf(\eta)+d\varphi(\eta) \\ f(i\eta) &= \alpha f(\eta)+\beta\varphi(\eta) \\ \varphi(i\eta) &= \gamma f(\eta)+\delta\varphi(\eta). \end{aligned}$$

A harmadik egyenletben irjunk η helyébe $(\eta+2Ki)$-t, a negyedik egyenletben pedig $(\eta+2K)$-t, az ily módon nyert egyenletek összehasonlításából kapjuk, hogy

$$a\mu+bc=c\lambda+ad. \qquad 1)$$

Ha továbbá az ötödik egyenletben η helyébe előbb $(\eta+2K)$-t, azután $(\eta+2Ki)$-t, a hatodik egyenletben $(\eta+2K)$-t, s majd $(\eta-2Ki)$-t irunk és az ily módon keletkező függvényeket, melyek szintén a differencziálegyenletnek integráljai, a fenti hat reláczió felhasználásával az alaprendszer elemeivel kétféle módon kifejezzük, s azután $f(\eta)$ és $\varphi(\eta)$ együtthatóit egyenlősítjük, a következő relácziókhoz jutunk:

$$a\lambda + \beta a = \mu a \tag{2}$$

$$b\beta = \mu\beta \tag{3}$$

$$a\mu + \beta c = \frac{a}{\lambda} \tag{4}$$

$$\beta d = \frac{\beta}{\lambda} \tag{5}$$

$$ca + d\gamma = \gamma\lambda + \delta a \tag{6}$$

$$c\beta + d\delta = \delta b \tag{7}$$

$$\frac{\gamma}{\mu} - \frac{\delta c}{d\mu} = ca + d\gamma \tag{8}$$

$$d\gamma + d\delta = \frac{\delta}{d} \cdot \tag{9}$$

A 3) és 5) egyenlet szerint, vagy

$$\beta = 0$$

vagy

$$\beta = \mu \quad \text{és} \quad d = \frac{1}{\lambda} \cdot$$

Ha $\beta = 0$, akkor bizonyításunk el van végezve, mivel másodfajú biperiodikus integrálunkhoz csak egy állandó faktor járul akkor is, ha η i-vel szorzódik. Egyszersmind ekkor a 2) és 4) egyenletből következik, hogy

$$\lambda = \mu = \frac{1}{\lambda},$$

azaz

$$\lambda = \mu = \pm 1,$$

tehát, hogy $f(\eta)$ $2K$ és $2Ki$, illetőleg $4K$ és $4Ki$ szerint elsőfajú biperiodikus függvény.

Most pedig kimutatom, hogy a $\beta \neq 0$ feltevés ellenmondáshoz vezet. Ugyanis ekkor a 4) és 7) egyenletből következik, hogy

$$\delta = -a$$

s ennek felhasználásával a 9)-ből:

$$\gamma = a(1 - \lambda^2),$$

mely értékeknek a 8)-ba való helyettesítésével a következő egyenletet nyerjük:

$$c\lambda(\lambda - \mu) = (\lambda^2 - 1)(\lambda - \mu),$$

honnan, ha λ nem egyenlő μ-vel,

$$c = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda}.$$

Végül az 1) egyenletből, ha λ a μ-től és $\lambda\mu$ a pozitiv egységtől különbözik, a számára ezen értéket nyerjük:

$$a = \frac{(\lambda^2 - 1)(\lambda - \mu)}{\mu\lambda - 1}.$$

Ebből látjuk, hogy ha λ és μ egymástól s ezen kívül szorzatuk az egységtől különböző, akkor az a, b, c, d állandók teljesen meghatározott értékkel birnak függetlenül attól, hogyan van választva a $\varphi(\eta)$, a melyről csak annyit tettünk fel, hogy $f(\eta)$-val alaprendszert alkot. Az a feltevés azonban, hogy az a, b, c, d állandók függetlenek a $\varphi(\eta)$-tól, ellenmondáshoz vezet. Vegyük ugyanis $\varphi(\eta)$ helyett $f(\eta) + \varphi(\eta) = \varphi_1(\eta)$ integrált az $f(\eta)$-val alaprendszert alkotó integrál gyanánt, akkor — mivel ez ugyanazon függvényegyenleteknek tesz eleget, mint a $\varphi(\eta)$ — egyfelől lesz:

$$\begin{aligned}\varphi_1(\eta + 2K) &= af(\eta) + b\varphi_1(\eta) = (a+b)f(\eta) + b\varphi(\eta)\\ \varphi_1(\eta + 2Ki) &= cf(\eta) + d\varphi_1(\eta) = (a+d)f(\eta) + d\varphi(\eta),\end{aligned}$$

másfelől pedig:

$$\begin{aligned}\varphi_1(\eta + 2K) &= f(\eta + 2K) + \varphi(\eta + 2K) = (a+\lambda)f(\eta) + b\varphi(\eta)\\ \varphi_1(\eta + 2Ki) &= f(\eta + 2Ki) + \varphi(\eta + 2Ki) = (c+\mu)f(\eta) + d\varphi(\eta).\end{aligned}$$

Az $f(\eta)$ faktorainak összehasonlításából következik, hogy

$$b = \lambda, \quad d = \mu,$$

s a 3) és 5) egyenletekre való tekintettel:

$$\lambda = \mu = \frac{1}{\lambda},$$

azaz

$$\lambda = \mu = \pm 1,$$

miből egyfelől az következik, hogy az a és c állandók λ és μ-vel nem határozhatók meg, másfelől pedig, hogy $\beta = 0$.

Ennélfogva differencziálegyenletünknek általában van egy oly integrálja, mely a következő függvényegyenletnek tesz eleget:

$$
\left.\begin{aligned}
f(\eta+2K) &= \pm f(\eta) \\
f(\eta+2Ki) &= \pm f(\eta) \\
f(i\eta) &= i^k f(\eta)
\end{aligned}\right\} \qquad F)
$$

s mivel ez az integrál η-nak $2K$ és $2Ki$, illetve $4K$ és $4Ki$ szeri biperiodikus függvénye, ennélfogva a $sn \,.\, \eta$, $cn \,.\, \eta$, $dn \,.\, \eta$-val raczionálisan kifejezhető. A második integrálnak legfeljebb egyes speczialis esetekben lehetnek ily tulajdonságai. Megjegyzendő, hogy jelen vizsgálódásunk nem zárja ki oly eseteknek a fellépését sem, midőn mindkét integrál másodfajú biperiodikus függvény ugyan, de egyiknek sincsenek meg az *F)* alatti tulajdonságai.

III.

Czélunk lesz most már differencziálegyenletünknek amaz integráljait felkeresni, a melyek az S csoport összes substitutióinak η-ra való alkalmazásánál csak egy-egy állandóval szorzódnak.

Elegendő lesz azokkal az esetekkel foglalkoznunk, midőn α_1 és α_2 pozitivok, a mennyiben egyszerű substitutióval az ellenkező eset erre vihető vissza. Ugyanis, ha a *C)* differencziálegyenletbe y helyére az

$$y = \frac{sn^{\alpha_2}\eta \, cn^{\alpha_1}\eta}{dn^{\alpha_2+2\alpha_1}\eta} \cdot z$$

substitutióval új függő változót hozunk be, z-re nézve egy a *C)*-től csak abban különböző differencziálegyenletet kapunk, hogy ebben α_1 és α_2 helyén $-\alpha_1$ és $-\alpha_2$ áll. Ha pedig az α_1, α_2 mennyiségeknek csak egyike volna negativ, akkor az

$$y = \frac{cn^{\alpha_1}\eta}{dn^{2\alpha_1}\eta} \cdot z,$$

illetve az

$$y = \frac{sn^{\alpha_2}\eta}{dn^{\alpha_2}\eta} \cdot z$$

substitutió alkalmazandó.

Differencziálegyenletünknek α_1 és α_2 pozitiv értékei mellett csak egy tényleges singuláris pontja van, s ez az $\eta = K+Ki$, vagy $v = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$ pont. Ha az ezen ponthoz tartozó determináló alapegyenletnek absolut értékre nézve nagyobb negativ gyöke $-m$, akkor az integrál alakja:

$$y = e^{\lambda v} \prod_{k=1}^{m} \frac{\vartheta_1(v-a_k)}{\vartheta_3(v)}.$$

Ha a másik gyök, melyet $-n$-el jelölünk, szintén negativ, akkor a felirt alakban m helyére n is léphet.

A λ és a_k állandókról egyelőre csak annyit tudunk, hogy csak oly értékekkel birhatnak, a melyek mellett integrálunk a kirótt functionális tulajdonságoknak eleget tesz. Azonban azonnal meggyőződhetünk arról is, hogy az a_k állandók általában mind egymástól különbözők. Mert tegyük fel, hogy pl. a $v = a$ érték mellett az integrál l-edrendűen válnék zérussá, akkor y ily módon bontható két tényezőre

$$y = \left[\frac{\vartheta_1(v-a)}{\vartheta_3(v)}\right]^l \cdot y_1,$$

hol már y a $v = a$ érték mellett nem tűnik el. E szorzatalakot bevezetve a differencziálegyenletbe s azután a $v=a$ téve, kapnók, hogy általában

$$\vartheta_1'(0) = 0,$$

a mi természetesen nem lehetséges. Ez csak akkor nem következtethető a differencziálegyenletből, ha az a nullpont a differencziálegyenlet valamely singuláris pontjával esik össze, ennélfogva a $v = 0$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\tau}{2}$, $\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$ helyeken kívül egyebütt az integrálnak csak elsőrendű zéruspontja lehet.

Minthogy azonban integrálunknak oly tulajdonságúnak kell lennie, hogy csak egy állandóval szorzódjék, ha η s így v is i-vel szorzódik, tekintettel a ϑ függvények transformátiójára, mely szerint:*

---

* L. pl. KOENIGSBERGER: Vorlesungen über d. Theorie d. elliptischen Functionen, 2. 66. l., hol a II. alatti képletsorozatban

$$a_0=0, \quad a_1=1, \quad b_0=-1, \quad b_1=0$$

irandó. Mivel $\tau=\tau'=i$, a jelen esetben $c^2=1$, s mint könnyen igazolható: $c=+1$.

$$
\begin{aligned}
e^{-\pi v^2}\vartheta_1(iv) &= i\vartheta_1(v)\\
e^{-\pi v^2}\vartheta_0(iv) &= \vartheta_2(v)\\
e^{-\pi v^2}\vartheta_2(iv) &= \vartheta_0(v)\\
e^{-\pi v^2}\vartheta_3(iv) &= \vartheta_3(v)
\end{aligned}
$$

könnyen belátható, hogy ha $v = a$ az integrálnak zéruspontja, akkor ia-, i^2a-, i^3a-nak is zéruspontnak kell lennie, mert az ellenkező esetben a ϑ_1 argumentumai mások lennének az i-vel való szorzás után. Még csak azt kell megvizsgálni, hogy a $v = 0$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\tau}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$ hányszoros zéruspontok lehetnek? Először is jegyezzük meg, hogy a $v = \frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$ érték a számláló zéruspontjai között nem fordulhat elő, mert különben a számlálónak és nevezőnek közös tényezője volna. A $v=0$ pont a többi zéruspontoktól teljesen függetlenül elöfordulhat, a számláló zéruspontjai között, mivel $\vartheta_1(iv)$ a közös exponencziális tényezőtől eltekintve csak egy állandó szorzótényezőben különbözik a $\vartheta_1(v)$-től. A $v = \frac{1}{2}$ és $v=\frac{\tau}{2}$ zéruspontok tekintettel arra, hogy $\vartheta_1\left(v-\frac{1}{2}\right)$ és $\vartheta_1\left(v-\frac{\tau}{2}\right)$ exponencziális tényezőtől eltekintve $\vartheta_0(v)$ és $\vartheta_2(v)$-vel egyezik, ezek pedig v-nek i-vel való szorzásánál egymásba mennek át, egymással egyenlő fokszámban fordulhatnak elő. Vizsgálatunk eredményekép kapjuk tehát, hogy az integrálok csak a következő alakkal bírhatnak:

$$
y = \frac{\vartheta_1^{\mu}(v)\,\vartheta_0^{\nu}(v)\,\vartheta_2^{\nu}(v)}{\vartheta_3^{\mu+2\nu}(v)} \prod_k \frac{\vartheta_1(v-a_k)\,\vartheta_1(v-ia_k)\,\vartheta_1(v-i^2a_k)\,\vartheta_1(v-i^3a_k)}{\vartheta_3^4(v)}.
$$

Ez alakban már exponencziális tényező sem jelenhetik meg, mert akkor az integrál nem volna felruházva a kivánt tulajdonsággal. A k-ra vonatkozó szorzási jel alatti kifejezés az S csoport összes substitutióinak η-ra való alkalmazásánál változatlanul marad, ennélfogva úgy ez, valamint az egész szorzat $x = \frac{cn^2\eta}{dn^4\eta}$-nak raczionális és pedig, mivel csak a $K+Ki$ pontban válik végtelenné, egész raczionális függvénye. Bevezetve a ϑ függvények helyett a biperiodikus függvényeket, az integrál alakja

$$y = \frac{sn^{\mu}\eta\, cn^{\nu}\eta}{dn^{\mu+2\nu}\eta} \cdot R\left(\frac{cn^2\eta}{dn^4\eta}\right), \tag{G}$$

hol R könnyen megállapitható fokszámmal biró egész raczionális függvénynek a symboluma.

Ha y-t ezen alakja szerint előbb $\eta=0$, majd $\eta=K$ pont környezetében sorba bontjuk s a differencziálegyenletbe, melynek együtthatóit szintén η, illetőleg $(\eta-K)$ hatványai szerint haladó sorba bontottuk, helyettesitjük, akkor a legalacsonyabb hatvány együtthatójának zérussá tételéből nyerjük, hogy

$$\mu = 0, \quad \text{vagy} \quad a_2;$$
$$\nu = 0, \quad \text{«} \quad a_1;$$

azaz $\eta=0$, illetőleg $\eta=K$ az integrálnak csak a_2-ed, illetőleg a_1-edrendű zéruspontja lehet.

Az előadottak ismerete elegendő arra, hogy meghatározzuk azt az integrált, a mely az S csoport összes substitutióinak η-ra való alkalmazásánál csak egy-egy állandóval szorzódik.

Az $\eta = K+Ki$ singuláris ponthoz tartozó determináló alapegyenletnek ellentétes előjellel vett gyökei:

$$m = \frac{a_3+a_2+2a_1-4}{2} = -4\beta, \quad n = \frac{-a_3+a_2+2a_1-4}{2} = -4\alpha.$$

Legyen továbbá:

$$m-2a_1 = \frac{a_3+a_2-2a_1-4}{2} = m_1,$$

$$n-2a_1 = \frac{-a_3+a_2-2a_1-4}{2} = n_1,$$

$$m-\ a_2 = \frac{a_3-a_2+2a_1-4}{2} = m_2,$$

$$n-\ a_2 = \frac{-a_3-a_2+2a_1-4}{2} = n_2,$$

$$m-2a_1-a_2 = \frac{a_3-a_2-2a_1-4}{2} = m_3,$$

$$n-2a_1-a_2 = \frac{-a_3-a_2-a_1-4}{2} = n_3.$$

E jelölések szerint:

$$\begin{array}{llll} m \equiv n_3 \ (\text{mod. } 4) & \text{és pedig:} & m & = - n_3 - 4 \\ m_1 \equiv n_2 \ (\text{mod. } 4) & « \quad « & m_1 & = - n_2 - 4 \\ m_2 \equiv n_1 \ (\text{mod. } 4) & « \quad « & m_2 & = - n_1 - 4 \\ m_3 \equiv n \ (\text{mod. } 4) & « \quad « & m_3 & = - n - 4. \end{array}$$

Az előbb mondottak szerint differencziálegyenletünknek $G)$ alakkal biró integrálja lesz, ha az m-, illetőleg n-el jelölt mennyiségek valamelyike 4-el osztható szám és pozitiv; megjegyzendő, hogy minden esetben vagy az egyik m, vagy a vele congruens n pozitiv, illetve zérus, mi az m és n számokat összekapcsoló fenti négy egyenletből látható.

Feltételeztük volt, hogy a_1 és a_2 pozitiv értékekkel bírjanak, azonban az integráloknak meghatározása azt fogja mutatni, hogy ez a megszorítás nem szükséges.

*

Vegyük már most az egyes eseteket egymásután:

1. $m \equiv n_3 \equiv 0$ (mod. 4), azaz

$$a_3 + a_2 + 2a_1 - 4 \equiv 0 \ (\text{mod. } 8).$$

E kongruencziának megoldásai:

$$a_1 \equiv 0 \ (\text{mod. } 4)$$
$$\left.\begin{array}{l} a_2 \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \\ a_3 \equiv 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,\ 7,\ 6,\ 5 \end{array}\right\} (\text{mod. } 8)$$

$$a_1 \equiv 1 \ (\text{mod. } 4)$$
$$\left.\begin{array}{l} a_2 \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \\ a_3 \equiv 2,\ 1,\ 0,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3 \end{array}\right\} (\text{mod. } 8)$$

$$a_1 \equiv 2 \ (\text{mod. } 4)$$
$$\left.\begin{array}{l} a_2 \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \\ a_3 \equiv 0,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1 \end{array}\right\} (\text{mod. } 8)$$

$$a_1 \equiv 3 \ (\text{mod. } 4)$$
$$\left.\begin{array}{l} a_2 \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \\ a_3 \equiv 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,\ 7 \end{array}\right\} (\text{mod. } 8)$$

hol az a_2 és a_3 számok sorozatában az egymás alatt lévők tartoznak együvé.

Ezekben az esetekben a kivánt tulajdonsággal biró integrált könnyen megállapíthatjuk, a mennyiben, ha m pozitiv a $G)$ alakban $\mu=0$, $\nu=0$ kell legyen, ha pedig m negativ és így n_3 pozitiv, akkor $\mu=a_2$, $\nu=a_1$.

a) Ha $m=-4\beta\geq 0$, (β negativ egész szám vagy zérus), az integrál

$$y_1=f_1(\eta)=R\left(\frac{cn^2\eta}{dn^4\eta}\right)$$

és pedig egy $\frac{m}{4}$-edfokú egész raczonális függvény, a melynek együtthatóit a differencziálegyenletbe való behelyettesítéssel megállapítván, találjuk, hogy ez Gauss-féle sor:

$$y_1=f_1(\eta)=F\left(\beta, \alpha, \gamma, \frac{cn^2\eta}{dn^4\eta}\right)=F(\beta, \alpha, \gamma, x).$$

Ekkor az integrál az x-nek is egyértékű függvénye, ennélfogva az S csoport összes substitutióinak η-ra való alkalmazásánál változatlan marad. Ha $m=0$, az integrál egy állandó.

Miután a_3-nak elegendő pozitiv értékeket tulajdonítani, látjuk, hogy a_1 és a_2 pozitiv értékei mellett m mindig pozitiv, ha ezek negativ értékeket vesznek fel, akkor lehetséges, hogy m negativ és

b) $n_3=4(\beta-1)\geq 0$, (β pozitiv egész szám). Ekkor vezessünk be új függő változót a $C)$ egyenletbe az

$$y=\frac{cn^{\alpha_1}\eta\, sn^{\alpha_2}\eta}{dn^{2\alpha_1+\alpha_2}\eta}\cdot z$$

substitutióval, midőn is z-re oly differencziálegyenletet kapunk, melyben az $\eta=K+Ki$ helyhez tartozó alapegyenlet negativ gyöke $-n_3$, s a melyben α, β, γ helyébe $1-\alpha$, $1-\beta$, $2-\gamma$ lép. És így az integrál:

$$y_1=f_1(\eta)=\frac{sn^{\alpha_2}\eta\, cn^{\alpha_1}\eta}{dn^{\alpha_2+2\alpha_1}\eta}\,F\left(1-\beta,\ 1-\alpha,\ 2-\gamma,\ \frac{cn^2\eta}{dn^4\eta}\right).$$

A Gauss-féle sor a $(\beta-1)$-ik taggal megszakad. A biperiodikus függvények functionális tulajdonságaiból és azok komplex multiplicatiójából, mely szerint

$$sn\, i\eta = i\frac{sn\,\eta}{cn\,\eta}, \quad cn\, i\eta = \frac{1}{cn\,\eta}, \quad dn\, i\eta = \frac{dn\,\eta}{cn\,\eta}$$

következik, hogy

$$f_1(i^k\eta+\mu\,.\,2K+\nu\,.\,2Ki) = e^{\frac{\pi i}{2}[(k+2\mu)\alpha_2+2(\mu+\nu)\alpha_1]}f_1(\eta).$$

Egyszerű substitutióval a többi esetek mind az 1. *a)* esetre vihetők vissza s ezért csak az eredményeket fogom felirni.

2. $m_1 \equiv n_2 \equiv 0$ (mod. 4), azaz:

$$\alpha_3+\alpha_2-2\alpha_1-4 \equiv 0 \pmod{8}.$$

E kongruencziát kielégítő értékek:

$$\alpha_1 \equiv 0 \pmod{4}$$
$$\left.\begin{array}{l}\alpha_2 \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\\ \alpha_3 \equiv 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,\ 7,\ 6,\ 5\end{array}\right\} \pmod{8}$$

$$\alpha_1 \equiv 1 \pmod{4}$$
$$\left.\begin{array}{l}\alpha_2 \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\\ \alpha_3 \equiv 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,\ 7\end{array}\right\} \pmod{8}$$

$$\alpha_1 \equiv 2 \pmod{4}$$
$$\left.\begin{array}{l}\alpha_2 \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\\ \alpha_3 \equiv 0,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1\end{array}\right\} \pmod{8}$$

$$\alpha_1 \equiv 3 \pmod{4}$$
$$\left.\begin{array}{l}\alpha_2 \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\\ \alpha_3 \equiv 2,\ 1,\ 0,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3\end{array}\right\} \pmod{8}$$

a) Ha $m_1 = 4(\gamma-\beta-1) \geqq 0$, $(\gamma-\beta$ pozitiv egész szám), az integrál

$$y_1 = f_1(\eta) = \frac{cn^{\alpha_1}\eta}{dn^{2\alpha_1}\eta}\, F\left(\beta-\gamma+1,\ \alpha-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ \frac{cn^2\eta}{dn^4\eta}\right)$$

$$f_1(i^k\eta+\mu\,.\,2K+\nu\,.\,2Ki) = e^{\pi i(\mu+\nu)\alpha_1}f_1(\eta).$$

b) Ha $n_2 = 4(\beta-\gamma) \geqq 0$, $(\beta-\gamma$ pozitiv egész szám vagy zérus), akkor az integrál:

$$y_1 = f_1(\eta) = \frac{sn^{\alpha_2}\eta}{dn^{\alpha_2}\eta} F\left(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, \gamma, \frac{cn^2\eta}{dn^4\eta}\right)$$

$$f_1(i^k\eta+\mu . 2K+\nu . 2Ki) = e^{\frac{\pi i}{2}\alpha_2 [k+2(\mu+\nu)]} f_1(\eta).$$

3. $m_2 \equiv n_1 \equiv 0 \pmod{4}$, azaz:

$$\alpha_3-\alpha_2+2\alpha_1-4 \equiv 0 \pmod{8}.$$

E kongruenczia megoldásai:

$$\alpha_1 \equiv 0 \pmod{4}$$
$$\left.\begin{array}{l}\alpha_2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ \alpha_3 \equiv 4, 5, 6, 7, 0, 1, 2, 3\end{array}\right\} \pmod{8}$$

$$\alpha_1 \equiv 1 \pmod{4}$$
$$\left.\begin{array}{l}\alpha_2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ \alpha_3 \equiv 2, 3, 4, 5, 6, 7, 0, 1\end{array}\right\} \pmod{8}$$

$$\alpha_1 \equiv 2 \pmod{4}$$
$$\left.\begin{array}{l}\alpha_2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ \alpha_3 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\end{array}\right\} \pmod{8}$$

$$\alpha_1 \equiv 3 \pmod{4}$$
$$\left.\begin{array}{l}\alpha_2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ \alpha_3 \equiv 6, 7, 0, 1, 2, 3, 4, 5\end{array}\right\} \pmod{8}$$

a) Ha $m_2 = 4(\alpha-\gamma) \geq 0$, ($\alpha-\gamma$ pozitiv egész szám vagy zérus,) akkor az integrál:

$$y_1 = f_1(\eta) = \frac{sn^{\alpha_2}\eta}{dn^{\alpha_2}\eta} F\left(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{cn^2\eta}{dn^4\eta}\right).$$

A GAUSS-féle sor $(\alpha-\gamma)$-adfokú raczionális egész függvény s az integrál functionális tulajdonságai ugyanazok, mint a 2. *b)* esetben. Különben a két integrál csak annyiban különbözik egymástól, hogy α és β értékei fel vannak cserélve; amaz egy $(\beta-\gamma)$-adfokú egész raczionális függvény. Ugyanígy van ez a többi esetekben is.

b) Ha $n_1 = 4(\gamma-\alpha-1) \geq 0$, ($\gamma-\alpha$ pozitiv egész szám), az integrál:

$$y_1 = f_1(\eta) = \frac{cn^{\alpha_1}\eta}{dn^{2\alpha_1}\eta} F\left(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, \frac{cn^2\eta}{dn^4\eta}\right).$$

Functionális tulajdonságai a 2. *a)* alattiéval egyeznek.

4. $m_3 \equiv n \equiv 0 \pmod{4}$, azaz:

$$a_3 - a_2 - 2a_1 - 4 \equiv 0 \pmod{8}.$$

A következő értékek elégítik ki e kongruencziát:

$$a_1 \equiv 0 \pmod{4}$$
$$\left.\begin{array}{l} a_2 \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \\ a_3 \equiv 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3 \end{array}\right\} \pmod{8}$$

$$a_1 \equiv 1 \pmod{4}$$
$$\left.\begin{array}{l} a_2 \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \\ a_3 \equiv 6,\ 7,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \end{array}\right\} \pmod{8}$$

$$a_1 \equiv 2 \pmod{4}$$
$$\left.\begin{array}{l} a_2 \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \\ a_3 \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \end{array}\right\} \pmod{8}$$

$$a_1 \equiv 3 \pmod{4}$$
$$\left.\begin{array}{l} a_2 \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7 \\ a_3 \equiv 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 0,\ 1 \end{array}\right\} \pmod{8}$$

a) Ha $m_3 \equiv 4(\alpha - 1) \geqq 0$, ($\alpha$ pozitiv egész szám), az integrál:

$$y_1 = f_1(\eta) = \frac{cn^{a_1}\eta\, sn^{a_2}\eta}{dn^{a_2+2a_1}\eta} F\left(1-\alpha,\ 1-\beta,\ 2-\gamma,\ \frac{cn^2\eta}{dn^4\eta}\right).$$

Functionális tulajdonságai az 1. *b)* alatt találhatók.

b) Ha $n = -4\alpha \geqq 0$, (α negativ egész szám vagy zérus), akkor az integrál:

$$y_1 = f_1(\eta) = F\left(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \frac{cn^2\eta}{dn^4\eta}\right),$$

s ez az S csoport összes substitutióinál változatlan.

Ezzel megkaptuk differencziálegyenletünknek azon eseteit, a melyekben az integrál az S csoport összes substitutióinak η-ra való alkalmazásánál csak állandóval szorzódik s egyszersmind ezen integrált meg is határoztuk.*

---

* Mivel a felállitott integrálok az S csoport összes substitutióinak η-ra való alkalmazásánál csak állandóval szorzódnak, ebből következik, hogy

Végig tekintve a négy kongruencziának megoldásain, látjuk, hogyha a determináló alapegyenletek gyökeinek különbségei irreducibilis törtek, azaz a_1, a_2, a_3 mind páratlanok, akkor minden esetben van egy és csakis egy oly integrál, mely az *F)* alatti egyenleteknek eleget tesz. Természetesen a_2 és a_3-nak csak azon értékeit véve tekintetbe, melyek összege páros.

Ha $\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{4}, \frac{a_3}{4}$ nem mind irreducibilis törtek, azaz a_1, a_2, a_3 közt vannak páros számok is, akkor általában vagy mindkét integrál az *F)* alatti tulajdonságokkal bír, vagy egyik sem.

Az

$$\begin{aligned} &a_1 \equiv 0 \pmod{4} \\ &\left.\begin{aligned} a_2 &\equiv 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5,\ 6,\ 6,\ 7,\ 7 \\ a_3 &\equiv 4,\ 3,\ 5,\ 2,\ 6,\ 1,\ 7,\ 0,\ 1,\ 7,\ 2,\ 6,\ 3,\ 5 \end{aligned}\right\} \pmod{8} \end{aligned}$$

az 1. és 2. alatti, az

$$\begin{aligned} &a_1 \equiv 2 \pmod{4} \\ &\left.\begin{aligned} a_2 &\equiv 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5,\ 6,\ 6,\ 7,\ 7 \\ a_3 &\equiv 0,\ 1,\ 7,\ 2,\ 6,\ 3,\ 5,\ 4,\ 3,\ 5,\ 2,\ 6,\ 1,\ 7 \end{aligned}\right\} \pmod{8} \end{aligned}$$

értékek pedig a 3. és 4. alatti kongruencziát, hasonlóképen az

$$\begin{aligned} &a_1 \equiv 1 \pmod{2} \\ &\left.\begin{aligned} a_2 &\equiv 0,\ 2 \\ a_3 &\equiv 2,\ 0 \end{aligned}\right\} \pmod{4} \end{aligned}$$

értékek, melyeknél ismét az egymás alatt lévők tartoznak együvé, szintén két-két kongruencziát elégítenek ki, ennélfogva ezekben az esetekben általában a differencziálegyenletnek mindkét integrálja az *F)* alatti functionális tulajdonságokkal bír. Ez esetekben, mint látjuk, a determináló alapegyenletek gyökeinek különbségei

---

ezek egy-egy elsőrendű homogén lineáris differencziálegyenletet elégítenek ki.

V. ö. FROBENIUS: Über Irreductibilität lin. Diff. Gleichungen. Crelle Journal. 76. 456. l. Ezen dolgozatban ki van mutatva, hogy a GAUSS-féle differencziálegyenlet reducibilis, ha α vagy β, illetőleg $\gamma-\alpha$, vagy $\gamma-\beta$ egész szám. Mi ugyanezen eredményhez jutottunk az elliptikus függvények komplex multiplicatioja alapján.

közül vagy az egyik, vagy mind a három egész szám. Ekkor azonban a differencziálegyenletek elmélete szerint az alaprendszert alkotó integrálok egyike logarithmust tartalmazhat, ezen logarithmus azonban jelen esetekben, mivel α vagy β, illetőleg $\gamma-\alpha$, vagy $\gamma-\beta$ egész szám, nem mindig lép fel. Azonban a_1, a_2, a_3 bizonyos értékeinél (pl. szükségképen, ha a_1, a_2, a_3 közül valamelyik zérus) megjelenik a logarithmus, ekkor természetesen csak az egyik integrál birhat az *F)* alatti functionális tulajdonságokkal, mi onnan is kitűnik, hogy képleteink ekkor nem szolgáltatnak két egymástól különböző integrált.

Azokban az esetekben, a melyekben a determináló fundamental egyenletek gyökeinek különbségei közül az egyik, vagy mind a három egész szám, a felirt értékek teljesen nem meritik ki, a mennyiben a_1, a_2, a_3-nak ezen értékei:

$$a_1 \equiv 0 \pmod{4}$$
$$\left.\begin{array}{l} a_2 \equiv 0,\ 1,\ 1,\ 3,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5,\ 7,\ 7 \\ a_3 \equiv 0,\ 1,\ 7,\ 3,\ 5,\ 4,\ 3,\ 5,\ 1,\ 7 \end{array}\right\} \pmod{8}$$

$$a_1 \equiv 2 \pmod{4}$$
$$\left.\begin{array}{l} a_2 \equiv 0,\ 1,\ 1,\ 3,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5,\ 7,\ 7 \\ a_3 \equiv 4,\ 3,\ 5,\ 1,\ 7,\ 0,\ 1,\ 7,\ 3,\ 5 \end{array}\right\} \pmod{8}$$

szintén eleget tesznek a kimondott feltételnek, de egyik kongruencziának sem képezik megoldását. Ez esetekben tehát, valamint az

$$a_1 \equiv 0 \pmod{2}, \quad \left.\begin{array}{l} a_2 \equiv 0,\ 2 \\ a_3 \equiv 2,\ 0 \end{array}\right\} \pmod{4}$$

$$a_1 \equiv 1 \pmod{2}, \quad a_2 \equiv 0 \pmod{4}, \quad a_3 \equiv 0 \pmod{4}$$

értékek mellett, melyek jellemezve vannak az által, hogy a determináló alapegyenletek gyökeinek különbségei közül kettő egész szám, egyik integrál sem bír az *F)* alatti functionális tulajdonságokkal. Ezen esetekben az egyik integrál okvetlenül logarithmust tartalmaz, s ezért a másik integrál nem lehet sem első, sem másodfajú biperiodikus függvény, a mennyiben ez maga után vonná azt, hogy mindkét integrál ily tulajdonságú; t. i. az egyik integrálból a másikhoz eljuthatunk, ha η-ra az S csoport valamelyik substitutióját alkalmazzuk.

Végül könnyen beláthatjuk, hogy az

$$a_1 \equiv 1 \ (\text{mod. } 2), \quad a_2 \equiv 2, \quad a_3 \equiv 2 \ (\text{mod. } 4)$$

feltételeket kielégitő értékek sem találhatók a négy kongruencziának megoldásai között. Ezen esetekben a determináló alapegyenletek gyökeinek különbségei reducibilis törtek, de egyik sem egész szám, tehát egyik integrál sem bir logarithmusi singuláris ponttal. Mindkét integrál lehet biperiodikus függvény. Hogy ezen esetekben tényleg nincs oly integrál, mely csak állandóval szorzódnék az S csoport substitutióinak η-ra való alkalmazásánál, azt egy példán is láthatjuk. Legyen $a_2 = 2$, $a_3 = 2$ és a_1 tetszőleges, akkor az egyik integrál:

$$y_1 = \frac{1}{dn^{a_1}\eta},$$

a másik integrált nyerjük, ha ebben η helyére $i\eta$-t irunk, s lesz:

$$y_2 = \frac{cn^{a_1}\eta}{dn^{a_1}\eta}.$$

Ezek egyike sem tesz eleget az F) alatti egyenleteknek s könnyű belátni, hogy $a_1 \equiv 1$ (mod. 2) esetén nincs oly lineár kapcsolat sem közöttük, a melynek folytán keletkező függvény a jelzett tulajdonságokkal birna.

A következő eredményhez jutottunk tehát:

A C) differencziálegyenletnek, ha a determináló alapegyenletek gyökeinek különbségei irreducibilis törtek, mindig van egy és csakis egy oly integrálja, mely az S csoport összes substitutióinak η-ra való alkalmazásánál csak egy állandóval szorzódik. Ha az alapegyenletek gyökeinek különbségei közül csak az egyik, vagy mind a három egész szám, akkor lehetséges, hogy mindkét integrál ily tulajdonságú, ha t. i. logarithmusi singuláritással egyik sem bír, lehetséges, hogy csak az egyik tesz eleget az F) alatti functionális egyenleteknek, midőn a másik integrál logarithmust tartalmaz, s végül fellépnek oly esetek, melyek meg-

oldásait képező integráloknak egyike sem bír a jelzett tulajdonsággal. Ugyancsak egyik integrál sem elégíti ki az F) egyenleteket, ha a determináló alapegyenletek gyökeinek különbségei közül kettő egész szám, vagy ha egyik sem egész szám, de reducibilis törtek.

IV.

Az első integrál ismeretével a második integrált egyszerű quadraturával elő tudjuk állítani. Legyen y_1 a meghatározott integrál s tegyük a *C)* egyenletben

$$y = y_1 . u,$$

akkor u-ra nézve, ha rövidség kedvéért a *C)* egyenletben $\frac{dy}{d\eta}$ együtthatóját p-vel jelöljük, a következő másodrendü reducibilis differencziálegyenletet nyerjük:

$$y_1 u'' + \left(p y_1 + 2\frac{dy_1}{d\eta}\right) u' = 0, \quad ^{*)}$$

azaz

$$\frac{u''}{u'} = -p - \frac{2}{y_1}\frac{dy_1}{d\eta},$$

a honnan kétszeri integrálással tekintettel arra, hogy

$$-\int p d\eta = \log \frac{sn^{\alpha_2 - 1}\eta \, cn^{\alpha_1 - 1}\eta}{dn^{\alpha_2 - 1 + 2(\alpha_1 - 1)}\eta},$$

lesz:

$$u = c\int \frac{1}{y_1^2} \frac{sn^{\alpha_2 - 1}\eta \, cn^{\alpha_1 - 1}\eta}{dn^{\alpha_2 - 1 + 2(\alpha_1 - 1)}\eta} d\eta + c',$$

hol c és c' az integráczió állandói, melyeket, mivel csak partikuláris integrált akarunk meghatározni, tetszőlegesen választhatunk. Tegyük ezért $c = 1$, $c' = 0$, akkor a két alaprendszert alkotó y_1 és y_2 integrálok hányadosa

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{1}{y_1^2} \frac{sn^{\alpha_2 - 1}\eta \, . \, cn^{\alpha_1 - 1}\eta}{dn^{\alpha_2 - 1 + 2(\alpha_1 - 1)}\eta} d\eta.$$

Az integrálhányados tehát egy elliptikus integrál, mely az általános elméletnek megfelelőleg, attól a néhány különös esettől eltekintve, midőn a második integrál logarithmust tartalmaz, az η-ból és másodfajú integrálokból lineárisan összerakható. Az integrál kiszámítása az ismert általános módszer szerint elvégezhető.

Ama substitutiók, a melyeket az integrálhányados szenved, ha η-ra az S csoport substitutióit alkalmazzuk, könnyen meghatározhatók. Ha η a periodusok egész számú sokszorosával szaporodik, akkor az integrálhányados az őt előállító elliptikus integrál periodiczitási modulusainak egész számú sokszorosával nő. Ha pedig η helyébe $i\eta$ lép, akkor az integrálhányados egy állandóval és pedig i-nek páratlan kitevőjű hatványával szorzódik. Ez kitűnik onnan, hogy az integráljel alatti függvény a_1 és a_2 páratlan értékeinél legfeljebb ellentettjébe megy át, ha η helyére $i\eta$ lép és így annak η hatványai szerint haladó hatványsorbafejtésében csak minden negyedik hatvány jelenik meg és csakis a páros hatványok fordulhatnak elő, ennélfogva $\frac{y_2}{y_1}$-nek $\eta = 0$ pont körüli sorbafejtésben a hatványkitevők mind vagy $4k+1$, vagy $4k+3$ alakúak. Ezek alapján az y_2 által szenvedett substitutióknak felállítása annyira egyszerű, hogy azok teljes meghatározását itt mellőzhetjük.

*

Most még vegyünk egy egyszerű példát s ennél határozzuk meg teljesen a második integrált is. Legyen

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 3,$$

akkor az első integrál a 2. *a)* szerint:

$$y_1 = \frac{cn\,\eta}{dn^2\eta}$$

és így az integrálhányados:

$$f(\eta) = \frac{y_2}{y_1} = \int\limits_0^{\eta} \frac{sn^2\eta\, dn^2\eta}{cn^2\eta}\, d\eta,$$

hol az integrálandó függvény η-nak $4k+2$, s így maga az integrál $4k+3$ kitevőjű hatványai szerint halad és így, ha Ω és Ω' jelölik az integrál periodiczitási modulusait:

$$f(i^k\eta+\mu\,.\,2K+\nu\,.\,2Ki)=(-i)^k f(\eta)+\mu\Omega+\nu\Omega',$$

minek alapján rögtön felirható, hogyan változik az y_2 az S csoport substitutióinak η-ra való alkalmazásánál.

E másodfajú integrál, mely csak $\eta=K$ és $\eta=Ki$ pontokban válik elsőrendűen végtelenné, ϑ függvényekkel és azok deriváltjaival könnyen előállítható. Ugyanis az integrálandó függvény — tekintettel arra, hogy a polusaihoz tartozó residuumok zérusok — így állítható elő:*

$$\frac{sn^2\eta\, dn^2\eta}{cn^2\eta}=c+\frac{d}{d\eta}\left[c_1\frac{\vartheta_1'\left(v-\frac{1}{2}\right)}{\vartheta_1\left(v-\frac{1}{2}\right)}+c_2\frac{\vartheta_1'\left(v-\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(v-\frac{\tau}{2}\right)}\right]$$

$$=c+\frac{d}{d\eta}\left[c_1\frac{\vartheta_2'(v)}{\vartheta_2(v)}+c_2\frac{\vartheta_0'(v)}{\vartheta_0(v)}\right],$$

hol a c, c_1, c_2 állandók a $v=0$, illetve $\eta=0$ s a singuláris pontok környezetében való sorbafejtéssel határoztatnak meg, s kapjuk, hogy

$$c_1=c_2=-\frac{1}{2K},\quad c=\frac{1}{4K^2}\left(\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}+\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0}\right).$$

A transformatiós képletek kétszeri deriválásával s $v=0$ helyettesitéssel nyerjük, hogy

$$\vartheta_2''+\vartheta_0''=-2\pi\vartheta_0$$

s mivel $\vartheta_0=\vartheta_2$, lesz:

$$c=-\frac{\pi}{2K^2}=-\frac{2}{\pi\vartheta_3^4}.$$

Ezeknek az értékeknek tekintetbe vételével az integrálhányados:

$$\frac{y_2}{y_1}=f(\eta)=-\frac{\pi}{2K^2}\eta-\frac{1}{2K}\left[\frac{\vartheta_2'(v)}{\vartheta_2(v)}+\frac{\vartheta_0'(v)}{\vartheta_0(v)}\right].$$

A periodiczitási modulusok tehát:

$$\Omega=-\frac{\pi}{K},\quad \Omega'=-\frac{\pi i}{K}+\frac{2\pi i}{K}=\frac{\pi i}{K},$$

---

* V. ö. KRAUSE: i. m. I. 82. §.

s a közöttük fennálló LEGENDRE-féle relácio :

$$K\Omega' - \Omega K' = 2\pi i.$$

Hogy $f(\eta)$ $(-i)$-vel szorzódik, ha η helyére $i\eta$ lép, az a fenti előállításból is következtethető.

Magok az integrálok $[f_1(\eta), f_2(\eta)]$ az S csoport substitutióinak η-ra való alkalmazásánál tehát a következő változásokat szenvedik:

$$f_1(i^k\eta + \mu \,.\, 2K + \nu \,.\, 2Ki) = (-1)^{\mu+\nu} f_1(\eta)$$

$$f_2(i^k\eta + \mu \,.\, 2K + \nu \,.\, 2Ki) =$$

$$= (-1)^{\mu+\nu}(\mu \,.\, \Omega + \nu \,.\, \Omega') f_1(\eta) + (-i)^{k+2(\mu+\nu)} f_2(\eta).$$

II. eset.

I.

A determináló alapegyenletek gyökei most oly törtek, melyeknek nevezői 2, 3, 6; s ha a gyökök különbségeiben a számlálókat, a melyek tetszőleges egész számok, ismét a_1, a_2, a_3 jelölik, akkor

$$1 - \gamma = \frac{a_1}{2}, \quad \gamma - \alpha - \beta = \frac{a_2}{3}, \quad \alpha - \beta = \frac{a_3}{6}.$$

Ennélfogva ama GAUSS-féle differencziálegyenlet, melyben az α, β, γ mennyiségek az ezen egyenletekkel meghatározott értékekkel bírnak, a következő:

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + \left[\left(1 - \frac{a_1}{2}\right) - \left(2 - \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{3}\right)x\right]\frac{dy}{dx} -$$

$$- \frac{(6 - 3a_1 - 2a_2)^2 - a_3^2}{144} y = 0. \qquad A)$$

A 0, 1, ∞ singuláris pontokhoz tartozó alapegyenletek gyökei:

$$0 \text{ és } \frac{a_1}{2}; \qquad 0 \text{ és } \frac{a_2}{3};$$

$$\frac{6 - 3a_1 - 2a_2 + a_3}{12} \text{ és } \frac{6 - 3a_1 - 2a_2 - a_3}{12};$$

honnan látható, hogy arra, hogy az integrálok az

$$x(1-x)u'' + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{6}x\right)u' = 0 \qquad a)$$

egyenlet,* (melyben az alapegyenletek gyökeinek különbségei: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$) integrálhányadosának egyértékű függvényei legyenek, szükséges, hogy $3a_1+a_3$, vagy a mi ugyanaz, hogy a_1+a_3 páros szám legyen.

Az *a)* egyenlet független változója az integrálhányadossal így volt előállítva:

$$x = 3(1-\varepsilon^2)sn^2\eta\, cn^2\eta\, dn^2\eta, \quad k^2 = -\varepsilon^2, \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}},$$

s a substitutiók, melyeknek η-ra való alkalmazásánál e függvény változatlanul marad az

$$S_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon K \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

és ezek megfordításaiból származó csoport összes substitutiói. E substitutiók egyszerűbb alakot öltenek, ha η helyett $\eta+K'i$ integrálhányadost veszszük, midőn is lesz:

$$x = 3(1-\varepsilon^2)sn^2(\eta+K'i)\,cn^2(\eta+K'i)\,dn^2(\eta+K'i)$$

$$x = 3(1-\varepsilon^2)\varepsilon^2 \frac{cn^2\eta\, dn^2\eta}{sn^6\eta} \qquad B)$$

s a substitutiók általános alakja:

$$S = \begin{pmatrix} (-\varepsilon)^k & m\,.\,2K+n\,.\,2K'i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} k=0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ m, n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \end{matrix}$$

Az *A)* egyenletbe a *B)* relácczió segélyével vezessük be η-át új független változó gyanánt. Miután

$$\frac{d\eta}{dx} = -\frac{1}{6(1-\varepsilon^2)} \frac{sn^7\eta}{cn\,\eta\, dn\,\eta\,(1-\varepsilon^2 cn^2\eta)^2},$$

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{sn^6\eta}{6(1-\varepsilon^2)} \left[\frac{-\varepsilon}{cn^2\eta\, dn^2\eta} + \frac{4(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 cn^2\eta)^3}\right],$$

---

* L. Math. és Phys. Lapok, X. 364. l.

az $A)$ differencziálegyenlet a behelyettesítés után a következő alakban jelenik meg:

$$\frac{d^2y}{d\eta^2}-\left[(a_1-1)\frac{\varepsilon(1-\varepsilon^2cn^2\eta)^2}{sn\,\eta\,cn\,\eta\,dn\,\eta}+2(a_2-1)\frac{(\varepsilon^2-1)\,cn\,\eta\,dn\,\eta}{sn\,\eta\,(1-\varepsilon^2cn^2\eta)}\right]\frac{dy}{d\eta}+$$
$$+\frac{(6-3a_1-2a_2)^2-a_3^2}{12}\cdot\frac{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2cn^2\eta)}{sn^2\eta}\,y=0. \qquad C)$$

E differencziálegyenlet együtthatói η-nak $2K$ és $2K'i$ $\left(\frac{2K'i}{2K}=-\varepsilon^2\right)$ szerint biperiodikus függvényei és $\frac{dy}{d\eta}$ faktora csak elsőrendűen, y együtthatója csak másodrendűen válik végtelenné az egyes singuláris pontokban, tehát ismét Picard-féle differencziálegyenlettel van dolgunk.

A szakaszparallelogrammán belül fekvő singuláris pontok:

$$\begin{array}{lll} x=0\text{-nak megfelelőleg:} & \eta=K,\ K'i,\ K+K'i; \\ x=1\text{-nek} \quad « & \eta=-\dfrac{2\varepsilon^2K}{1-\varepsilon^2},\ -\dfrac{4\varepsilon^2K}{1-\varepsilon^2}; \\ x=\infty\text{-nek} \quad « & \eta=0. \end{array}$$

Az $x=1$-nek megfelelő $\eta=-\frac{2\varepsilon^2K}{1-\varepsilon^2}$ és $\eta=-\frac{4\varepsilon^2K}{1-\varepsilon^2}$ pontok az

$$1-\varepsilon^2cn^2\eta$$

másodrendű biperiodikus függvény két zéruspontját szolgáltatják. Ugyanis

$$sn\frac{K}{1-\varepsilon^2}=\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}},^{*}$$

ennek folytán:

$$sn\left(-\frac{2\varepsilon^2K}{1-\varepsilon^2}\right)=sn\left(\frac{K}{1-\varepsilon^2}+K'i\right)=\frac{1}{k}\sqrt{1-\varepsilon^2}=\sqrt{1-\varepsilon}$$

és így

$$cn\left(-\frac{2\varepsilon^2K}{1-\varepsilon^2}\right)=\sqrt{\varepsilon}$$
$$dn\left(-\frac{2\varepsilon^2K}{1-\varepsilon^2}\right)=\sqrt{\varepsilon^2}.$$

---

* L. Math. és Phys. Lapok, X. 367. l., 5. képlet.

S mivel

$$-\frac{4\varepsilon^2 K}{1-\varepsilon^2}=\frac{2\varepsilon^2 K}{1-\varepsilon^2}+2K+2K'i,$$

lesz

$$sn\frac{-4\varepsilon^2 K}{1-\varepsilon^2}=\quad sn\frac{-2\varepsilon^2 K}{1-\varepsilon^2}=\sqrt{1-\varepsilon}$$

$$cn\frac{-4\varepsilon^2 K}{1-\varepsilon^2}=\quad cn\frac{-2\varepsilon^2 K}{1-\varepsilon^2}=\sqrt{\varepsilon}$$

$$dn\frac{-4\varepsilon^2 K}{1-\varepsilon^2}=-\,dn\frac{-2\varepsilon^2 K}{1-\varepsilon^2}=\sqrt{\varepsilon^2}.$$

Itt még a gyököknek előjele határozatlan. Ha azonban ezen utóbbi értékeket az összeadási tétel alapján is kiszámítjuk, akkor a *cn* és *dn*-nál az előjelek is határozottakká lesznek s nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} sn\frac{-4\varepsilon^2 K}{1-\varepsilon^2}&=\quad sn\frac{-2\varepsilon^2 K}{1-\varepsilon^2}=\sqrt{1-\varepsilon}\\ cn\frac{-4\varepsilon^2 K}{1-\varepsilon^2}&=\quad cn\frac{-2\varepsilon^2 K}{1-\varepsilon^2}=\varepsilon^2\\ dn\frac{-4\varepsilon^2 K}{1-\varepsilon^2}&=-\,dn\frac{-2\varepsilon^2 K}{1-\varepsilon^2}=\varepsilon. \end{aligned} \qquad E)$$

Határozatlan marad még a gyöknek az előjele a *sn*-nál, ez azonban a számolások folyamán semmi nehézséget nem fog okozni.

Az *E)* alatti egyenleteknek felhasználásával felállíthatók a determináló alapegyenletek, melyeknek megoldásai a következő gyököket szolgáltatják:

$\eta=K,\ K'i,\ K+K'i$ mellett: $0,\ a_1,$

$\eta=-\dfrac{2\varepsilon^2 K}{1-\varepsilon^2},\ \dfrac{-4\varepsilon^2 K}{1-\varepsilon^2}$ « $0,\ a_2,$

$\eta=0$ « $\dfrac{6-2a_2-3a_1-a_3}{2},\ \dfrac{6-2a_2-3a_1+a_3}{2}.$

E gyökök, miután a_1+a_3 párosnak tételeztetett fel, mind egész számok, s miután közöttük van mindig negativ, általánosan szólva legalább az egyik integrál másodfajú biperiodikus függvény lesz.

Habán Mihály.

AZ EGYIPTOMIAK MATHEMATIKAI ÉS ASTRONOMIAI ISMERETEI.

(Első közlemény.)

Midőn arra vállalkozunk, hogy megállapítsuk, milyen volt az ókor keleti népeinek a mathematikája, nem szabad azt reménylenünk, hogy az elérendő eredményekből a mai mathematikai tudományra gyakorlati haszon fog háramlani. A mai mathematikusok problémáinak egyikét sem fogja a legkevésbbé sem előmozdítani az, ha a régi egyiptomiak, babiloniaiak, aszírok, sziriaik, főniciaiak, stb. mathematikai ismereteit kifürkésztük.

Ha mégis tájékozódni óhajtunk a szóban forgó népek mathematikai tudása felől, ezt tisztára az a művelődéstörténeti érdek okozza, a mely arra késztet, hogy az emberi szellem bármilyen tevékenységének a fejlődését kikutassuk. Meg akarjuk tudni, hogy hol és miképen fejlődtek ki azok az alapvető elemek, a melyek a mathematikai tudománynak mintegy csiráját képezik, meg akarjuk tudni, milyen volt mai számrendszerünknek a történeti fejlődése és ki akarjuk deríteni, miképen hatottak be fokozatosan az emberi megismerő képességbe mindazok az elvek, a melyek a mathematikai törvények megalkotására és biztos alkalmazására vezettek. Ezt az ókor egyik népénél sem vihetjük keresztül olyan exakt módon, mint az egyiptomiaknál. A kedvező égalji viszonyok következtében Egyiptomban nagy számmal maradtak fönn az olyan nagyszerű emlékek, a melyek kivitele igazán nagy ismereteket tételez föl a mathematika, mechanika és csillagászat terén. A gizehi gúlák, a melyek legnagyobbikát, kb. 2800 körül Kr. e. építették, félreérthetetlen módon tanúskodnak arról, hogy e tekintetben az egyiptomiak már magas fokon állottak abban a korban, a mely a mi korunkat több mint 4700 évvel előzi meg. A mellett sok papiruszra írt okmányból is megismerhetjük mindazt, a mit az egyiptomiak a mennyiségtanból, mértanból, geodéziából, csillagászatból és mechanikából tudtak.

Nem találkozunk elméleti fejtegetésekkel, hanem a gyakorlati életből merített feladatok megoldásaival. Az egyiptomiak földmívelő nép voltak és így nem ritkán a mértan alapvető föladataival, háromszögek, négyszögek és körök fölmérésével és kiszámításával is kellett foglalkozniok. Ehhez járult az a körülmény is, hogy a Nilus évenként bekövetkező áradása következtében a talaj fölületén nem ritkán változások állottak be, a melyek folytán a határmesgyék új megallapitása vált szükségessé. Ez azonban a geometriai és arithmetikai elemi ismeretek segítsége nélkül nem volt lehetséges. Ilyképen, a mindennapi élet szükségleteinek a kényszere alatt idővel a mathematikai pragmatika bizonyos neme fejlődött ki, a mely a gyakorlati számítás valamennyi szabályát magában foglalta. E szabályokat azonban nem tantételek alakjában jegyezték föl, hanem ama gyakorlati czéloknak megfelelően, a melyeknek szolgáltak, a mindennapi életből vett példák alakjában. A szabályok gyűjteménye ilyen formában nemcsak a földművesnek volt számtalan esetben nélkülözhetetlen segéd- és kézikönyve, hanem a háztartás, a kereskedelem és állami közigazgatás számításainál is fontos szerepet játszott. Épen e körülményeknél fogva az ilyen okmányok földolgozása történeti szempontból rendkívül érdekes. Megtaláljuk azt az utat, a melyen az emberi szellem elindult, hogy olyan föladatokat megoldhasson, a melyek a mi szemünkben ismeretes és magától értődő dolgoknak tetszenek, a melyek azonban egykor az emberi gondolkodás teljes erejét igénybe vették. Ezeknek a kérdéseknek a földolgozásánál is legalkalmasabb, ha a mathematikai tudomány történeti fejlődésének a menetét követjük.

Már itt is, tanulmányom kezdetén, hangsúlyoznom kell, hogy nem minden tekintetben mutathatok föl új, eddig ismeretlen eredményeket. Nem egy pontra nézve megegyezem azokkal a fejtegetésekkel, melyeket Cantor «Vorlesungen über Geschichte der Mathematik» czímű jeles művének I. kötetében ad. De tudományos szempontból ezek a részek is érdekesek. Ismeretes, hogy Léon Rodet a «Journal Asiatique»-ban (1892) megjelent «Les prétendus problèmes d'algèbre du manuel du calculateur Égyptien» czímű értekezésében Cantor kutatásait téveseknek igyekszik kimutatni. Talán ez a körülmény is némi érdekességet kölcsönöz fejtegetésemnek.

A legrégibb forrás, a melyből ez irányban tanulságot meríthetünk, egy papirusztekercs, a melyet az angol A. H. Rhind vásárolt Egyiptomban és a mely jelenleg a British Museum tulajdona. Ez a tekercs a Kr. e. XV. századból való, de bevezető szavainak a tanúsága szerint egy sokkal régibb, nyilván III. Amenemhat király idejéből, tehát a Kr. e. XIX. század második feléből származó eredetinek a másolata. De Egyptomban már sokkal korábban is czéltudatosan foglalkoztak mathematikával és csillagászattal, földrajzzal és geodéziával. Már Pepi király idejében (körülbelül 2500 Kr. e.) is pontosan ismerték a Nap és Hold pályáját, szorgalmasan megfigyelték a fontosabb csillagcsoportokat és az év több vallási ünnepét az égi testek állásához fűzték. Már akkor megünnepelték az újhold és holdtölte, a Sothis csillag heliakus keltének a napját és határozottan megkülönböztették a 354 napos holdévet a 365 napos napévtől, a *kis évet* a *nagy évtől.* Még régibbek a gúlák, a régi Egyiptom leghatalmasabb és legnevezetesebb, de épen nem legrégibb emlékei. III. Amenemhat király volt az, a ki a mathematika terén addig empirikus úton elért ismereteket összegyüjtötte és leiratta, de nem tankönyv alakjában, a melyben a tantételek és bizonyítékaik rendszeresen váltakoznak, hanem kényelmes kézikönyv gyanánt, a mely gyakorlati czéloknak szolgált. Az a körülmény, hogy egy ilyen segédkönyvnek az összeállítása csak III. Amenemhat idejében tűnt föl szükségesnek, vagy hogy csak az ő uralkodása alatt vált a mathematika már évezredekkel azelőtt gyakorlatilag értékesített szabályainak az *alkalmazott mathematika* úgynevezett kézikönyvévé való összefoglalása szükségessé, alighanem e király nagyszerű alkotásaiban leli magyarázatát. III. Amenemhat dicsőségét nem annyira győzelmes hadjárataival, mint inkább a béke áldásos műveivel igyekezett megalapítani. Ő alkotta meg a csodálatos Moeris tavat, a melynek nagyságáról és hasznáról a régiek nem győznek eleget beszélni, azt az óriás medenczét, a melyet arra a czélra ásatott a mai Fayum kerületben, hogy az áradás fölösleges vizét magába fogadja és addig megtartsa, míg az esetleg bekövetkezendő szárazság idején a vízkészletet a szántóföldek öntözésére föl lehet használni. E mesterséges tenger közelébe építette III. Amenemhat a labirintust, az ókor e híres épületét. Sok emléket is emeltetett. A hammamati sziklán levő fölirat szerint a király, uralkodása IX. évében a rohani sziklás völgybe ment és ott személyesen vezette a kőfejtési munkálatokat. Ennek az alkotó szellemű uralkodónak, a ki annyi mindenféle művészt foglalkoztatott és olyan nagyszerű épületeket és emlékeket hozott létre, mint előtte senki sem, utána is csak kevesen, arról is gondoskodni kellett, hogy azokat a mathematikai és mechanikai problémákat, a melyek az általa elrendelt munkálatok kivitele közben fölmerültek, a jövő nemzedékeknek kézikönyv gyanánt szolgáló gyűjteménybe egyesítsék. III. Amenemhat királynak ez a műve avat be bennünket a régi egyiptomiak mathematikai tudományának a titkaiba.

*

Az egyiptomiak számrendszere már a legrégibb idők óta, a melyekbe a történeti hagyomány visszanyúlik, *tizes számrendszer* volt. Az egyeseket függélyes, ritkábban vízszintes vonallal és annak ismétlésével fejezték ki, ilyképen:

$$\underset{1}{\mathrm{I}\ \text{vagy}\ -},\quad \underset{2}{\mathrm{II}\ \text{vagy}\ =},\quad \underset{3}{\mathrm{III}\ \text{vagy}\ \equiv},\quad \underset{4}{\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{II}}{\mathrm{II}}\ \text{vagy}\ \equiv},\quad \underset{5}{\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{III}}{\mathrm{II}}\ \text{vagy}\ \equiv=},\ \text{stb.}$$

A tizeseket a $\cap$ jellel és ismétlésével fejezték ki:

$$\underset{10}{\cap},\quad \underset{20}{\cap\cap},\quad \underset{30}{\genfrac{}{}{0pt}{}{\cap\cap}{\cap}},\quad \underset{40}{\genfrac{}{}{0pt}{}{\cap\cap}{\cap\cap}},\quad \underset{50}{\genfrac{}{}{0pt}{}{\cap\cap\cap}{\cap\cap}},\ \text{stb.}$$

A tizesek és egyesek kombinációja révén összetett számokat így írták:

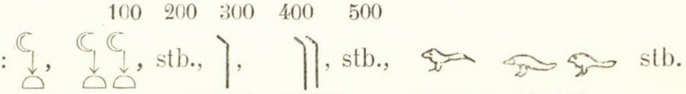
$$\underset{11}{\cap\mathrm{I}\ \text{vagy}\ \genfrac{}{}{0pt}{}{\cap}{\mathrm{I}}},\quad \underset{12}{\cap\mathrm{II}\ \text{vagy}\ \genfrac{}{}{0pt}{}{\cap}{\mathrm{II}}},\quad \underset{35}{\genfrac{}{}{0pt}{}{\cap\cap\mathrm{III}}{\cap\ \mathrm{II}}},\quad \underset{86}{\genfrac{}{}{0pt}{}{\cap\cap\cap\cap\mathrm{III}}{\cap\cap\cap\cap\mathrm{III}}},\ \text{stb.}$$

Ezeket a számokat azonban más módon is írták és ez történelmi szempontból annál inkább méltó a figyelemre, mert ezen a réven a mi számjegyírásunk eredetét azonnal fölismerjük. Mi a tizeseket az egyesektől nem külön számjegyekkel, hanem helyi értékükkel különböztetjük meg. Így például a *hatvannégyet* úgy fejezzük ki, hogy a 6 számjegy mellé, még pedig tőle jobbra a 4 számjegyet írjuk. A 6 számjegy tizes értékét, mint 60-at, az egyesektől balra levő helye fejezi ki. Ugyanezt az eljárást alkalmazták a régi egyiptomiak már a Kr. e. XX. században is. A Rhind-féle papirusz egyik példájában a kör síkjának az adott átmérőből való szerkesztését és annak a kőr körülírt négyzet síkjához való viszonyát számítással magyarázzák. Azt látjuk, hogy a tízeseket nem külön számjegyekkel, hanem helyi értékökkel különböztették meg az egyesektől, azonkívül kétértelműség kikerülése czéljából a tizesek gyanánt szereplő számjegyek mellé írt egyesek fölé még egy ívet írnak. Igy például 16-ot nem ∩ ||| ||| fejez ki, hanem $\overline{|\,|||\,|||}$ vagyis $1\widehat{6}$, a 32 szám nem ∩∩| ∩| vagy ∩∩∩ ||, hanem $\overline{||\,||}$, vagyis $3\widehat{2}$, Ugyancsak $\overline{|\,||||\,||||} = 1\widehat{8} = 18$, $|||\overline{||}\,||||| = 6\widehat{4} = 64$, $||||\overline{|}\,|||| = 8\widehat{1} = 81$. De azt is látjuk, hogy az egyesek számjegyei fölött a körív vagy valamely más jegy szükséges volt, mert az egyes számoknak nem voltak külön jegyeik és így igen könnyen tévedések állhattak volna elő. Igy például, ha az egyeseket nem különböztetné meg külön jegy, a $\overline{||\,||} = 32$ számot igen könnyen ||| ||-nek lehetne olvasni.

A százasokat c jegygyel és ismétléseivel fejezték ki. Tehát:

c,	cc,	cc c,	cc cc,	ccc cc, stb.
100	200	300	400	500

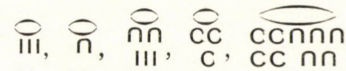
Továbbá:



1000	2000	10,000	20,000	100,000	200,000

Az egyiptomiak a $\frac{2}{3}$ kivételével, a melyet a  jegygyel fejezték ki, nem ismertek más törteket, mint az u. n. törzstörteket, a melyeknek a számlálója 1. Ezeket a törteket ugy jelölték, hogy a számjegyek fölé a jegyet irták.

E szerint:



stb.

$^1/_3$ $^1/_{10}$ $^1/_{23}$ $^1/_{300}$ $^1/_{450}$

Más törtekkel nem is számoltak. Ha valamely probléma közben véletlenül mások is előfordultak, akkor azokat törzstörtekké bontották föl. Ha például a $\frac{7}{8}$ tört fordult elő, akkor $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ törtekre bontották föl. Ennélfogva a legfontosabb problémák egyike a törteknek törzstörtekké való redukcziója volt. E közben a következő elvet követték. Minthogy minden egész szám vagy páros, vagy páratlan, tehát csak vagy $2n$ vagy $(2n+1)$ formájú lehet, az $\frac{a}{b}$ tört helyett $n.\frac{2}{b}+\frac{1}{b}$ törteket írtak. Minthogy továbbá $\frac{1}{b}$ törzstört, szükséges volt, hogy a $\frac{2}{b}$-t törzstörtekre bontsák föl. A Rhind-féle papirusznak csakugyan egy egész fejezete azzal a kérdéssel foglalkozik, miként lehet olyan törteket, a melyeknek számlálója a 2 szám, törzstörtekre redukálni. Természetes, hogy csak olyan törtek jöhetnek tekintetbe, a melyeknek nevezője páratlan szám, tehát $\frac{2}{2n+1}$ formájú törtek.

Ha az egyes törzstörteket tekintjük, a melyek ez által a szétbontás által keletkeznek, fölismerjük, hogy ez két, mathematikailag teljesen indokolt módszer alapján történt.

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6};\quad \frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15};\quad \frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28};$$

$$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66};\quad \frac{2}{23}=\frac{1}{12}+\frac{1}{276};\quad \frac{2}{27}=\frac{1}{18}+\frac{1}{54};$$

$$\frac{2}{35}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42};\quad \frac{2}{65}=\frac{1}{45}+\frac{1}{117};\quad \frac{2}{91}=\frac{1}{70}+\frac{1}{130},\ \text{stb.}$$

Másrészt azt látjuk:

$$\frac{2}{17}=\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68};\quad \frac{2}{19}=\frac{1}{14}+\frac{1}{38}+\frac{1}{133};$$

$$\frac{2}{31}=\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155};\quad \frac{2}{37}=\frac{1}{24}+\frac{1}{111}+\frac{1}{296};$$

$$\frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776},\ \text{stb.}$$

Ha ezt behatóbban vizsgáljuk, azt látjuk, hogy az első csoport mindegyik törtje két, a második csoport mindegyik törtje három törzstörtre van szétbontva.

Az első csoport egy példáját vevén, például $\frac{2}{91}$ et, azt látjuk:

$$\frac{2}{91}=\frac{1}{70}+\frac{1}{130}.$$

Ezt azonban így is írhatjuk:

$$\frac{2}{91}=\frac{1}{7.10}+\frac{1}{13.10}.$$

7 és 13 a 91 két törzstényezője, míg a 10 az arithmetikai középértéke e két törzstényezőnek, mert $\frac{7+13}{2}=10$.

Ugyanezt látjuk az első csoport mindegyik példájánál. $\frac{2}{65}=$ $=\frac{1}{45}+\frac{1}{117}$. E mellett $45=5.9$ és $117=13.9$, a miben 5 és 13 a 65 két törzstényezője, a 9 pedig e törzstényezők arithmetikai középszáma. Ugyanazt a törvényt akkor is fölismerjük, ha maga a nevező törzsszám, mert akkor a nevező megfelel e törzsszámnak az egységgel való szorzatával. A két törzstört nevezőiben akkor föltűnnek: egyszer a törzsszám szorozva a törzsszám és az egység közti arithmetikai közepével, másszor az egység szorozva ezzel a közepével. Így például:

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}.$$

De $4=1.4$ és $28=7.4$; 1 és 7 a 7 törzstényezői, 4 pedig e tényezők arithmetikai középszáma, mert $4=\frac{7+1}{2}$, stb.

A törvény, a mely szerint az első csoport törtjei szét vannak bontva, a következő arithmetikai képletben fejezhető ki:

$$\text{ha } a=a_1 . a_2, \text{ akkor } \frac{2}{a}=\frac{1}{a_1 . \frac{a_1+a_2}{2}}+\frac{1}{a_2 . \frac{a_1+a_2}{2}}. \qquad 1)$$

E tétel helyessége könnyen bebizonyítható. Mert ha

$$\frac{2}{a}=\frac{2}{a_1 . a_2},$$

akkor

$$\frac{2}{a}=\frac{2(a_1+a_2)}{a_1 \, . \, a_2(a_1+a_2)}=\frac{2}{a_1(a_1+a_2)}+\frac{2}{a_2(a_1+a_2)}=$$

$$=\frac{1}{a_1 \, . \, \frac{a_1+a_2}{2}}+\frac{1}{a_2 \, . \, \frac{a_1+a_2}{2}}.$$

A második csoport törtjének szétbontására vonatkozó törvény is könnyen kideríthető.

$$\frac{2}{17}=\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}.$$

Ezt azonban így is irhatjuk:

$$\frac{2}{17}=\frac{1}{3 \, . \, 4}+\frac{1}{3 \, . \, 17}+\frac{1}{4 \, . \, 17},$$

a hol:

$$17=2(3 \, . \, 4)-(3+4).$$

Ugyanezt a törvényt a többi törtnél is találjuk.

$$\frac{2}{19}=\frac{1}{14}+\frac{1}{38}+\frac{1}{133},$$

akkor

$$\frac{2}{19}=\frac{1}{2 \, . \, 7}+\frac{1}{2 \, . \, 19}+\frac{1}{7 \, . \, 19}$$

és

$$19=2 \, . \, (2 \, . \, 7)-(2+7).$$

Szintúgy:

$$\frac{2}{31}=\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155},$$

mert

$$\frac{2}{31}=\frac{1}{4 \, . \, 5}+\frac{1}{4 \, . \, 31}+\frac{1}{5 \, . \, 31}$$

és

$$31=2 \, . \, (4 \, . \, 5)-(4+5).$$

Látjuk tehát, *ha* $a=2(a_1 \, . \, a_2)-(a_1+a_2)$, *akkor*

$$\frac{2}{a}=\frac{1}{a_1 \, . \, a_2}+\frac{1}{a_1 \, . \, a}+\frac{1}{a_2 \, . \, a}. \qquad 2)$$

Ezt is mathematikailag könnyű bebizonyítani. Mert ha

$$a=2(a_1a_2)-(a_1+a_2),$$

akkor

$$\frac{a+a_1+a_2}{a_1 \cdot a_2}=2,\quad \text{tehát}\quad \frac{2}{a}=\frac{a+a_1+a_2}{a_1a_2 \cdot a}=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_1a}+\frac{1}{a_2a}.$$

Az egyiptomiak különös figyelmet fordítottak a tizedes törteknek közönséges törzstörtekké való átváltoztatására, természetesen gyakorlati példák formájában. Az a kérdés, miképen lehet 9, 8, 7, 6 . . . kenyeret tíz személy között egyenlő részekben elosztani. Így például azt olvassuk:

«Kilencz kenyeret tíz személy között elosztani: az úgy történik, hogy $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{30}$-ot 10-zel szoroznak.

.	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{30}$
. .	$1^2/_3$	$^1/_{10}$	$^1/_{30}$
. . . .	$3\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	
. . . .	$7^1/_5$		

összesen 9 kenyér.»

Itt azok a számok, a melyek az eredeti szövegben piros tintával vannak írva, kisebb nyomással vannak föltüntetve. Azokat az értékeket tartalmazzák, a melyek a számításban közelebbi alkalmazást nyernek. Ha e két kisebb nyomtatású számsort összeadjuk, akkor $7\frac{1}{5}+1\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}=9$ összeget nyerjük, míg az e számoktól balra levő pontok összege $8+2=10$.

Itt tehát egyrészt az van kimutatva, miképen kell a $\frac{9}{10}$ törtet törzstörtekre bontani, a mennyiben $\frac{9}{10}=\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{30}$, másrészt megvan e fölbontás helyességének a próbája is, a mennyiben ki van mutatva, hogy $10 \cdot \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{30}\right)=9$.

Ez a próba megérdemli, hogy jobban figyelmünkbe vegyük, mert megmutatja, milyen úton-módon végezték a régi egyiptomiak a *szorzási műveletet.* A szorzót a mai úgynevezett olasz szabály módjára bizonyos számú részre bontották, ezekkel elvégezték a szorzást és a megfelelő részek összeadása révén megkapták a kivánt szorzatot. A fönn idézett példában először 2-vel szoroztuk

$\left[\text{mert } 2\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{30}\right)=\frac{4}{3}+\frac{2}{5}+\frac{1}{15}=1\tfrac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\right.$ $\left.=1\tfrac{2}{3}+\frac{2}{15}=1\tfrac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}\right]$, e szorzás eredményét ismét 2-vel szorozták és ez által megkapták az eredeti érték 4-szeresét, majd ismét 2-vel, a mi által annak 8-szorosát nyerték. A 8-szoros és 2-szeres érték összege adja annak 10-szeresét. Általában a szorzásnak ezzel a nemével találkozunk.

Az az általános fölfogás, hogy az egyiptomiaknak nem 4, hanem csak 2 alapmüveletök volt, nem felel meg a valóságnak. Igaz ugyan, hogy minden alkalommal, ha azt a műveletet kellett végrehajtaniok, a melyet mi *kivonás*nak nevezünk, tehát az $a-b=?$ képletnek megfelelő számítást, az illető problémát összeadásra alakították át, a mennyiben azt kérdezték, hogy mennyit kell b-hez hozzáadni, hogy az a-t megkapjuk. Ha *osztást*, például $\frac{a}{b}=?$ kellett végrehajtaniok, azt a számot keresték, a mely b-vel szorozva a-t adja. De nem szabad figyelmen kívül hagyni, hogy alapjában véve mi is csak két különböző számítási műveletet végezünk. Az $a-b=?$ kérdést mi is úgy oldjuk meg, ha azt kérdezzük, milyen számot kell b-hez adnunk, hogy a-t megkapjuk és ha az $\frac{a}{b}=?$ föladatot kell megoldanunk, azt keressük, hogy milyen számmal kell b-t szoroznunk, hogy a-t kapjuk? Ha teljesen következetesek akarunk maradni, azt kellene mondanunk, hogy nekünk is csak két alapműveletünk van, nem pedig négy. Csakugyan, az egyiptomiak azokat a műveleteket, a melyeket mi kivonásnak, illetőleg osztásnak nevezünk, más névvel illették, mint az összeadást és szorzást. Az összeadást az előre lépő lábak képes jegyével jelölték, míg a kivonást a hátrafelé lépő lábak jegyével, *temt* volt az összeg fogalmának a kifejezése, *udat* a maradéké. Megtaláljuk a *nas* szót is, a mely a mi «osztani» szónknak felel meg, például *nas son hent met-paut* = «osszad el 2-t 9-czel», míg *art uah* a szorzás fogalmát fejezi ki. Az egyiptomiak egészen jól ismerték a 4 alapműveletet, csakhogy valamennyit az összeadásra és szorzásra vezették vissza, épen úgy, mint a mai számtantanitásban.

Példa gyanánt vizsgáljuk a 4 : 15 osztás kivitelét, a mely egy számtani föladat alkalmából a Rhind-féle papiruszban fordul elő. «Szorozd a 15 számot, hogy 4-et találj.

. 15	$^1/_{15}$ 1	
$\frac{1}{10}$	$1\frac{1}{2}$	összesen 4-et tesz.
$^1/_5$	3	tehát $\frac{1}{5}$-del és $\frac{1}{15}$-del kell szorozni.»

Az idézett példát nem kell bőven fejtegetnünk. Ha 15-öt $\frac{1}{10}$-del szorozzuk, $1\frac{1}{2}$-et kapunk; az egész $\frac{1}{5}$-e 3, $\frac{1}{15}$-e 1, minthogy pedig $3+1=4$, akkor $\frac{1}{5}+\frac{1}{15}$ az a tényező, a melylyel 15-öt szorozni kell, hogy 4-et kapjunk. Így tehát $4:15=\frac{1}{5}+\frac{1}{15}$.

Általában érdekes megtudni, miképen végezték az egyiptomiak a *törtekkel* való műveleteket. Első sorban a törtek összeadása és kivonása köti le figyelmünket, már azért is, mert e példákban tulajdonképen mindig csak olyan számításokat kell végezni, a melyekben több tört összegét egy keresendő szám által úgy kell kiegészíteni, hogy a nyert eredmény egy adott mennyiségnek megfeleljen. A számítások e nemeit az ezekben a számításokban előforduló egyiptomi *seqem* = «hozzáadni vagy kiegészíteni» kifejezésre való tekintettel az egyiptologusok *seqem-számítások*nak nevezték. Az egésznek magyarázatául szolgál a következő példa:

	ap		*en*	*seqemt*			
	előírása		a	kiegészítésnek			
«	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{112}$	
	7	1		$1^1/_2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{56}$		összesen		$\frac{1}{2}$.»	
	$3^1/_2$	$\frac{1}{2}$					

Ez alkalommal ismét kisebb számokkal tüntettük föl a papiruszban piros tintával írt számokat, a melyek a tekintetbe jövő számítási eredményt tartalmazzák. A példa tanulsága világos. Az tűnik ki belőle, hogy miképen kell $\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$-ot $\frac{1}{2}$-dé kiegészíteni. Látjuk, hogy $\frac{1}{28}$-ot vettek föl egységnek és ennek következtében $\frac{1}{4}$-et 7 ilyen egységnek tekintik. Más szóval: az $\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$ kifejezésben a 28 nevezőt közös nevezőnek vették és ez által 7 és 1 lesznek az új számlálók. Az a kérdés, hogy mivel kell az $\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$ összeget szorozni, hogy azokat a számokat nyerjük, a melyek $\frac{7}{28}+\frac{1}{28}$-ot $\frac{1}{2}$-dé egészítik ki. Látjuk, hogy az $\frac{1}{4}$ és $\frac{1}{28}$ számokat $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$-det kellett szorozni, hogy az ilyképen nyert számok összege, vagyis $3\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ olyan számot adjon, a mely 7+1-hez hozzáadva annyiszor $\frac{1}{28}$-ot tegyen ki, hogy annak értéke $\frac{1}{2}$-nek megfeleljen. Egy egészben $\frac{28}{28}$ van, $\frac{1}{2}$ tehát $=\frac{14}{28}$, minthogy azonban $7+1=8$, $3\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=6$-ot kellett hozzáadni, hogy a keresett $\frac{14}{28}=\frac{1}{2}$-et megkapják.

A számítási eljárás kissé nehézkes, alapjában véve azonban csak azért az, mert az egyiptomiak nem akartak más törtekkel, mint az úgynevezett törzstörtekkel számolni. Történeti szempontból reánk nézve főleg az fontos, hogy *az egész számítás alapeszméje,* valamennyi törtnek közös nevezőre való hozatala, *már a Kr. e. XX. században ugyanaz volt, mint ma.*

Nem kevésbbé érdekes a törteknek törtekkel való szorzásáról szóló fejezet sem. A mi egyszeregyünk módjára táblázat van benne összeállítva, a mely a legszokásosabb törteknek egymással való szorzását tünteti föl. Például:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}+\frac{1}{36},\quad \text{stb.}$$

Továbbá azt olvassuk: «Egy tört $\frac{2}{3}$-a. Ha azt mondják neked: micsoda $\frac{1}{5}$-nek $\frac{2}{3}$-a? vedd annak dupláját és hatszorosát, az annak két harmada. Hasonló módon történjék minden törttel, a mely előfordul.»

E szavak értelme világos. Minthogy $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, valamely törtet úgy szorzunk $\frac{2}{3}$-dal, hogy a tört nevezőjét 2-vel és 6-tal szorozzuk. Mindig ilyen volt az eljárás. Ha valamely törttel kellett szorozni, ezt a törtet törzstörtjeire bontották és azután ezekkel szoroztak. Ez úgy történt, hogy a szorzandó nevezőjét minden egyes törzstört nevezőjével megszorozták.

Ha tovább megyünk, azt tapasztaljuk, hogy az elemi mathematika egyéb kérdéseiben is a régi egyiptomiak voltak útmutatóink és hogy azok a módszerek, a melyeket valamely egyenlet és a haladványok problémáinak a megoldásánál alkalmazunk, 4000 évnél régibbek:

Az elsőfokú egyenletek elméletének egy példája:

«Valamely mennyiség hetede és annak egésze egyenlő 19.

7			. 8	. 2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{7}$	1		. . 16	. . 4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
		$\frac{1}{2}$	4	 9	$\frac{1}{2}$	
		$\frac{1}{4}$	2			
		$\frac{1}{8}$	1			

a keresett mennyiség: $16\frac{1}{2}\ \frac{1}{8}$; $\frac{1}{7} : 2\frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$; összesen 19.»

Mindez elég világos. Első sorban minden $\frac{1}{7}$-re hozatik; akkor az egész 7 heted, $\frac{1}{7}$ pedig 1 heted, összesen 8 heted. Most 19-et 8-czal osztunk, természetesen a régi egyiptomiak módjára, azt keresve, hogy milyen számmal kell 8-at szorozni, hogy 19-et nyerjünk. Ha az egyszeres $= 8$, akkor a kétszeres $= 16$, a fél $= 4$, egy negyed $= 2$ és 1 nyolczad $= 1$; minthogy pedig $16+2+1=19$, 8-at $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$-dal kell szorozni, hogy 19-et kapjunk, vagyis $\frac{19}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Ez azonban még nem a keresett mennyiség, hanem annak $\frac{1}{7}$-e, azért ezt az eredményt, vagyis $\frac{19}{8}$ értékét 7-tel kell szorozni. Az egyiptomiak módjára ez úgy történik, hogy a szorzót, 7-et, aliquot részeire bontják. Ezek: $1+2+4$. Tehát:

$$\begin{array}{ll} \text{az egyszeres} & = 2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} \\ \text{a kétszeres} & = 4+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \\ \text{és a négyszeres} & = 9+\frac{1}{2} \\ \hline \text{a hétszeres pedig} & = 16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}. \end{array}$$

A keresett mennyiség tehát $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$; ha ehhez egy hetedét adjuk, vagyis $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, akkor csakugyan 19-et kapunk. Ez a fönti példa kiszámításának menete; akármilyen vontatottnak tünik is föl nekünk, alapjában véve mégis csak ugyanaz, a melyet mi is követünk. Mert ha $x+\frac{x}{7}=19$, akkor mi azt mondjuk: $\frac{7x+x}{7}=19$, vagyis $\frac{7+1}{7}x=19$, vagy $\frac{8}{7}x=19$ és így $x=\frac{19}{8}.7$.

Több példa bizonyítja, hogy az egyiptomiak tökéletesen ismerték a *mértani és számtani haladványok* törvényeit és hogy az azokkal kapcsolatban levő különféle föladatokat ugyanazon elvek alapján oldották meg, mint mi. A Rhind-féle papiruszban a következő számsorokkal találkozunk:

.	2801	7
. .	5602	49
. . . .	11204	343
összesen	19607	2401
		16807
	összesen	19607

A jobb oldali számokról nyilvánvaló, hogy azok a 7 szám első öt hatványát és azok összegét adják. Minthogy azonban ugyanaz a 19607 szám a három baloldali szám összege gyanánt is megjelenik és azonfölül a baloldali számok a 2801 számnak 7-el való, egyiptomi módra végzett szorzását mutatják be, mindkét számsornak belső kapcsolatban kell egymással állania. A 7-nek a jobb oldalon levő hatványai minden esetre egy olyan mértani haladványnak a tagjai, a melynek első tagja $a_1=7$ és hányadosa $q=7$. Ismeretes, hogy minden mértani haladványban a tagok összege, $s=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$. A mi esetünkben $q^n=7^5=16807$, tehát $\frac{q^n-1}{q-1}=$ $=\frac{16806}{6}=2801$. A baloldali számok tehát az $s=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$ kiszámításának az eredményei, míg a jobb oldalon ugyanazt az összeget a haladvány egyes tagjainak az összeadása révén nyerjük.

Másutt ezt olvassuk:

«Fejezet a különbségek elosztásáról. Ha 10 mérő gabonát úgy kell 10 személy között elosztani, hogy mindegyik személy és a következő személy gabonarésze közötti különbség $\frac{1}{8}$ mérő, míg a közepes átlag mégis csak 1 mérő, akkor vonassék le 10-ből 1, ez 9, azután vétessék a különbség fele, vagyis $\frac{1}{16}$ mérő, 9-szer, ez $\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$-ot ad, ehhez adassék hozzá a közepes átlag és vonassék le $\frac{1}{8}$ mérő, személyenkint, az utolsóig. Ezt kapjuk: $1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{16}$, $1\,\frac{3}{8}\,\frac{1}{16}$, $1\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{16}$, $1\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{16}$, $1\,\frac{1}{16}$, $\frac{7}{8}\,\frac{1}{16}$, $\frac{3}{4}\,\frac{1}{16}$, $\frac{5}{8}\,\frac{1}{16}$, $\frac{1}{2}\,\frac{1}{16}$, $\frac{3}{8}\,\frac{1}{16}$, összesen 10.»

Mai számítási eljárásunk szerint ebben a föladatban *számtani haladványt* látunk, a melyben a tagok összege, $s_n=10$, a tagok száma, $n=10$ és a különbség $d=-\frac{1}{8}$. Azt is tudjuk, hogy d negativ lévén,

$$a_n=a_1-(n-1)\,d$$

és

$$s_n=\frac{n}{2}\,[a_1+a_n].$$

Ennélfogva:

$$s_n=\frac{n}{2}\,[a_1+a_1-(n-1)\,d]$$

vagy: $\frac{2s_n}{n} = 2a_1 - (n-1)d$ és $2a_1 = \frac{2s_n}{n} + (n-1)d$

vagy: $a_1 = \frac{s_n}{n} + (n-1)\frac{d}{2}$.

A fönti példának megoldásában ugyanezzel a folyamattal találkozunk. A közepes átlag $\frac{s_n}{n} = \frac{10}{10} = 1$. Első sorban 10-ből 1-et kell levonni és az ilyképen nyert 9 számot a fél különbséggel, vagyis $\frac{1}{16}$-dal szorozni. Ez ugyanaz, mint a mit mi az $(n-1).\frac{d}{2}$ képlettel fejezünk ki. Ennek a szorzásnak az eredményét, vagyis $\frac{1}{2} + \frac{1}{16}$-ot azután a közepes átlaghoz kell hozzáadnunk, hogy az első személyre eső mennyiséget megkapjuk. Mi is így járunk el, mert hogy a_1-t kapjuk, $(n-1)\frac{d}{2}$-t kell $\frac{s_n}{n}$-hez hozzáadnunk. A fönti példában tehát szigorúan ugyanazzal az eljárással találkozunk, mint a melyet a mathematika törvénye megkövetel. Minthogy a Rhind-féle papirusz, a melyben a fönti példa foglaltatik, a Kr. e. XX. századból való, az egyiptomiaknak már a régi birodalom idejében, tehát legalább a Kr. e. III. évezredben kellett a haladványok törvényeit ismerniök. Minthogy pedig ezeket a képleteket egész ügyesen használták föl, azt kell föltételeznünk, hogy náluk a mathematikai érzék és ennélfogva a kulturális alkotó erő is már a történelem legrégibb idejében nagyon ki volt fejlődve.

Még határozottabban tünik ez ki a következő példából, a melyben a haladványok elméletét ügyesen kötötték össze az egyenletek elméletével. Abban a fejezetben, a melynek *Tunnu*, vagyis «különbség» a czime, a következő számítással találkozunk:

«100 kenyeret olyképen kell 5 személy között elosztani, hogy a 3 első személy részeinek $\frac{1}{7}$-e egyenlő legyen a 2 utolsó személy részeivel; mekkora a különbség?

	. 23	
	. $17\frac{1}{2}$	
a különbség $5\frac{1}{2}$	. 12	
	. $6\frac{1}{2}$	
	. 1	összesen 60
		$\frac{2}{3}$ 40

Most pedig szoroztassék meg:

$1\frac{2}{3}$-szor	23, ez annyi mint	$38\frac{1}{3}$
	$17\frac{1}{2}$	$29\frac{1}{6}$
	12	20
	$6\frac{1}{2}$	$10\frac{2}{3}\,\frac{1}{6}$
	1 összesen 60	$1\frac{2}{3}$ összesen 100.»

Első pillantásra majdnem úgy látszik — nevezetes, hogy CANTOR* is ezt a nézetet vallja — mintha e példa írója az $5\frac{1}{2}$ számot csak egyelőre tételezte volna föl a keresett különbség értéke gyanánt és e szerint 1-től kiindulva számította volna ki az egyes mennyiségeket; utóbb azonban észrevette, hogy ezen a módon az összeg nem 100-at, hanem csak 60-at tesz ki és minthogy $\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$, minden egyes mennyiséghez $\frac{2}{3}$-ot adott, vagyis $1\frac{2}{3}$-dal megszorozta, hogy a keresett összeget, 100-at megkapja.

Ez azonban nincsen így. Annak, a mi a fönti számokban ki van fejezve, megvan a maga mathematikai indokoltsága. Ha a keresett különbség d, akkor az öt mennyiségnek a következő értéke lesz:

$$a+4d,\ a+3d,\ a+2d,\ a+d,\ a.$$

Továbbá:

$$\frac{(a+4d)+(a+3d)+(a+2d)}{7}=(a+d)+a,$$

vagy:

$$3a+9d=7\,(2a+d),$$

tehát:

$$2d=11a$$

vagy:

$$d=5\tfrac{1}{2}\,a. \qquad 1)$$

Minthogy mind az öt mennyiség összege $=100$:

$$100=5a+10d$$

vagy:

$$100=5a+10\,.\,5\tfrac{1}{2}\,a=5a+55a,$$

vagyis:

$$100=60a$$

vagy:

$$a=\frac{100}{60}=1\tfrac{2}{3}. \qquad 2)$$

Így tehát azt látjuk, hogy a fönti példában előforduló számok nem önkényesek, hanem a mathematikai követelményeknek meg-

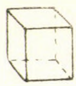
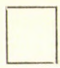
* CANTOR, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I. 41.

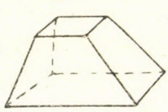
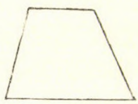
felelők. Minthogy ugyanis $d = 5\frac{1}{2}a$ és $a = 1\frac{2}{3}$, a számítást először az $a = 1$ értékkel végzik és az ilyképen nyert eredményt $1\frac{2}{3}$-dal megszorozzák.

Mindazt, a mit az egyiptomiak mathematikai ismereteiről eddig kifejtettünk, még számos példával lehetne támogatni. Ismerték az ú. n. társasszabályt is, a vegyítési számításokat, stb. és általában tisztában voltak az elemi mathematika mindazon törvényeivel és szabályaival, a melyek a polgári életben és államháztartásban szükséges számítások alapját képezték. Egyúttal azt is látjuk, hogy milyen régi korra tekinthetnek vissza ezek a számítások, a melyek még mai nap is középiskoláink alsó és részben fölső osztályaiban is a mathematikai tanítás anyagát képezik.

*

Ha a régi egyiptomiak *geometriai* ismereteit kutatjuk, azt találjuk, hogy ugyanazok, a kik olyan bámulatra méltó módon uralkodtak a számok birodalma fölött és az arithmetikai ismeretek titkaiba annyira behatoltak, a mértani képletek terén nem mutathattak föl hasonló sikereket. Ábrázoló müvészetök alkotásaiból is teljesen hiányzott a távlattan ismerete és hasonlóképen a mértanban is hijával voltak némely alapvető képzetnek, úgy hogy egészen egyszerű föladatok megoldásánál is hibákat követtek el. Így például nem ismerték valamely háromszög vagy trapez magasságának a fogalmát, vagy legalább is nem használták föl a gyakorlati életben. Ha valamely háromszög területét kellett kiszámítaniok, akkor az alap és az egyik szár szorzatának a felét vették. Ha valamely egyenszárú trapez felületét akarták kiszámítani, akkor lemérték a két párhuzamos oldalt és az egyik szárat; a párhuzamos oldalak összegének a fele ezzel a szárral megszorozva adta a trapez területét. Elég jól számították ki a kör területét. Az adott átmérőt $\frac{8}{9}$-del szorozták, vagy pedig — a mi ugyanennyit tesz ki — az adott átmérő hosszából annak $\frac{1}{9}$-ét levonták és az így nyert eredményt önmagával szorozták. Ha meggondoljuk, hogy a kör területe $= \left(\frac{d}{2}\right)^2 . \pi$ vagy $\left(d . \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2$, az egyiptomiak számítása szerint azonban $= \left(d . \frac{8}{9}\right)^2$, akkor az egyiptomiaknál $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ egyenlő volt $\frac{8}{9}$-del. Ez az érték a valóságot igen megközelíti, minthogy $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0{\cdot}886\ldots$ és $\frac{8}{9} = 0{\cdot}888\ldots$ Ebből az következik, hogy náluk $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = \frac{256}{81} = 3{\cdot}16\ldots$ Ez a körülmény annál figyelemre méltóbb, mert az ókor többi népe, a babiloniaiak, zsidók, rómaiak, chinaiak és részben még a görögök is még sokkal később is megelégedtek a $\pi = 3$ értékkel.

Annál sajátságosabbnak tűnik föl előttünk az a módszer, a melylyel magtáraik térfogatát számították ki. Ezek a magtárak kerek alaprajzú csonka kúpok vagy négyszögű csonka gulák voltak, a melyeknek alsó szélessége rendesen kétszer akkora volt mint a fölső. Egy ilyen magtár térfogatát a következő módon számították ki. A hogyan valamely trapez területét a két párhuzamos oldal összegének felével, szorozva az egyik szárral számították ki, a csonka kúp vagy csonka gula térfogatát úgy állapították meg, hogy a párhuzamos síkok összegének felét az oldalmagassággal megszorozták. Ez eredményhez főleg fogyatékos távlattani ismereteik következtében jutottak. Ha koczkát akartak rajzolni, nem így rajzolták: , hanem egyszerűen így .

Ennek megfelelően a csonka kúpot vagy csonka gúlát sem rajzolták így:  , hanem mindkettőt egyszerűen így: .

Ennélfogva e testek térfogatait is egyszerűen úgy számították ki, mint a trapezek területét, azzal a különbséggel, hogy a párhuzamos vonalokat a párhuzamos síkokkal helyettesítették. Míg tehát valamely trapez területét az $f = \frac{\text{a két alapvonal összege}}{2} \cdot$ oldal képlet szerint számították ki, a nevezett testek térfogatának a kiszámítása $v = \frac{\text{a két alapsík összege}}{2} \cdot$ oldal képlet szerint történt. Ha tehát a trapez alapja kétszer akkora mint a fölső alap, akkor $f = \frac{3a}{2} \cdot s$, vagy pedig $f = a \, . \, s \, . \, \frac{3}{2} \cdot$ Ugyanezt a képletet átvitték a csonka kúpra és a csonka gúlára is, csakhogy az alapvonal helyett alapsíkot vettek föl. Ha tehát valamely csonka kúpnak az alapsíkja kétszer akkora volt mint annak fölső síkja, úgy látszik, hogy a magtáraknál így volt, akkor a térfogat $= \frac{3 \, . \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi}{2} \cdot s$, vagy tekintettel arra, hogy az egyiptomiaknál

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{8}{9}, \quad V = \left(\frac{8}{9} d\right)^2 \cdot s \cdot \frac{3}{2} \cdot$$

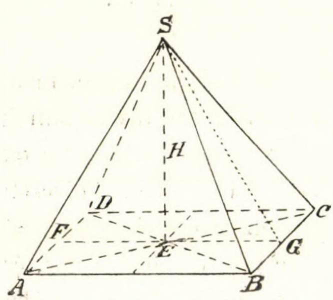
A Rhind-féle papirusz következő példája tanuskodik erről: «Egy kerek magtár kiszámitása, a melynek elemei 9 és 10. Vonjuk ki 9-ből $\frac{1}{9}$-et, vagyis 1-et, marad 8. Ha ezt a 8-at 8-czal szorozzuk, 64-et kapunk; a 64-et 10-zel szorozzuk és 640-et kapunk és adjuk hozzá még a felét, akkor 960-at kapunk. Ez a térfogata.»

Az adott átmérőből tehát annak $\frac{1}{9}$-ét vonták ki, vagyis az átmérőt $\frac{8}{9}$-del, $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ értékével szorozták; a kapott számot saját magával szorozták, tehát a $\left(\frac{8}{9} d\right)^2$ mennyiséget nyerték és ezt az adott $s = 10$-zel szorozták. Az ilyképen nyert értékhez még annak felét adták, vagyis azt $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$-del szorozták.

Alig kell bizonyítanunk, hogy az ily módon meghatározott térfogat nem volt helyes, de az egyiptomiak nem járhattak el másképen, minthogy mitsem tudtak arról, a mit mi távlattannak nevezünk és így a testeket sem tudták úgy ábrázolni, hogy azok képéből a térfogat kiszámításához szükséges méreteket helyesen áttekinthették volna. A következő eset azt bizonyítja, hogy a fönt ismertetett számítási eljárás náluk csakugyan elven alapult, és nem olyan véletlen tévedés folyománya, a mely a fönti példába belopódzott.

A Rhind-féle papirusz egy helyén egy négyszögű magtár térfogatának a kiszámítását találjuk, még pedig ugyanazon elv alapján, mint a kerek alaprajzú magtárak kiszámításánál. Kiszámítják a fölső, négyszögű sík térfogatát, ezt megszorozzák a magassággal és az ilyképen nyert szorzatot $\frac{3}{2}$-del megszorozzák. Ezt olvassuk: «Egy négyszögű magtár kiszámítása, a mely 10 rőf hosszú, 10 rőf széles és 10 rőf magas. Szorozzunk meg 10-et 10 zel, ez 100-at tesz; azután szorozzunk meg 100-at 10-zel, 1000-et kapunk; adjuk hozzá ennek felét, vagyis 500-at, 1500-at kapunk. Ez a térfogat.» A térfogat kiszámításánál tehát a $V =$ alapsík $\times$ magasság $\times \frac{3}{2}$ képlettel éltek.

Érdekesek a gúlák* hajlási viszonyainak alapelemeiből való kiszámításai is. Ez alapelemekhez tartoznak: 1. az alapél, vagyis a négyzetes alapsík oldala, a melyet egyiptomi nyelven *senti*-nek neveztek: 2. az oldalél, egyiptomi nyelven *per-e-mus*; 3. az alapnégyzet átlója, egyiptomi nyelven *uha tebt*; 4. a gúla magassága, vagyis a csúcstól az alapsíkra húzott függélyes vonal, egyiptomi nyelven *Kai-en-heru*. A fél átlónak az oldalélhez való viszonyát (tehát $\frac{EB}{SB}$, vagyis cosinusa az SBE szögnek, a mely alatt az oldalél az alapsíkhoz hajlik), nemkülönben a magasságnak a talppontjától az egyik alapélhez húzott merőleges vonalhoz való viszonyát (tehát $\frac{SE}{EG}$, vagyis tangense az SGE szögnek, a mely alatt az oldalháromszög az alapsíkhoz hajlik), *s-qed*-nek, vagyis a gúla hajlásának emelkedésének (elevatio-nak) nevezték.



E mennyiségeknek valamely gula építésénél való szerepe nyilvánvaló. Ha meg volt adva az alapél és az emelkedés nagysága, akkor már az egész gúla meg volt határozva. Ez lehet az oka annak, hogy a Rhind-féle papirusz akkora figyelembe részesíti azokat a viszonyokat, a melyek valamely gúla egyes elemei és annak hajlása között fönnállanak és példákkal is megvilágítja azokat, a nélkül, hogy e testek térfogatának a kérdését érintené. Az

* Itt négyzetes alaprajzú gúlákat értünk.

egyiptomiak könyveik összeállításánál nem törődtek elméleti kutatásokkal, hanem — mint már fönt kifejtettük — olyan kézi és segédkönyveket akartak szerkeszteni, a melyek a gyakorlat emberét hivatásos munkáiban támogathatják. Egyiptom a gúlák hazája volt és így elkerülhetlenül szükséges volt, hogy egy olyan könyvben, a minő az annyiszor idézett RHIND-féle papirusz, azokat a viszonyokat is kifejtsék, a melyek valamely gúla fölépítésénél első sorban tekintetbe jönnek.

Ez alkalommal még egy körülményt kell érintenünk, a mely tulajdonképen filológiai szempontból érdemel figyelmet. EISENLOHR, a ki először méltatta tudományosan a RHIND-féle papiruszt, az egyiptomi *s-qed* szót, a mely valamely gúla egyes elemeinek egymáshoz való viszonyát fejezi ki, a *hasonlóság* jelentése gyanánt vette,* CANTOR ** pedig EISENLOHR nyomán, a papirusz illető fejezetét *hasonlósági tan*nak nevezte. De úgy látszik, hogy LEPSIUS, a ki néhány igen találó megjegyzéssel küzdött EISENLOHR fejtegetései ellen,*** sem találta meg a *s-qed* szó helyes értelmezését, híjával lévén a kellő mathematikai ismereteknek. *Qed* annyi mint *kör, körözni* és így *s-qed* causativ értelemben *hajtani, körülhajtani.* De *qed* annyit is jelent, hogy *épület, s-qed* pedig = *építeni, emelkedni* és mint főnév — minthogy az egyiptomi nyelvben minden szó főnév, ige és melléknév is lehet — annyi mint *építés, emelkedés,* tehát az, a mit mathematikai-fizikai értelemben *elevatio*-nak nevezünk.

Ez alkalommal helyén való a *per-em-us* szót illető megjegyzés is. EISENLOHR *pir-em-us*-nak olvassa és azt hiszi, hogy a görög πυραμις szó az ó-egyiptomi szóból eredt.† CANTOR pedig, a ki EISENLOHR értelmezését elfogadta, odáig megy, hogy azt mondja: «Tulajdonképen a *Piramide* helyesírást kellene használnunk a

* EISENLOHR, Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter, Lipcse, 1877, 117. l.

** CANTOR, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I, 58. l.

*** Zeitschrift für ägyptische Sprache und Alterthumskunde, 1884. 6—9. ll.

† V. ö. Intern. Congress of the Orientalists, 1874, 288. l. és Zeitschrift f. ägypt. Sprache, 1875, 29. l.

Pyramide helyett és ebben a munkában csak fogyatékosságának tudatában élünk a közhasználatú írásmóddal.» A *pir-em-us* szó azonban az *us-ból kiállót* jelent és ez az összes példák tanúsága szerint nem lehet egyéb mint az *él*, a mely a gúla tömegéből kiáll. Ennélfogva az EISENLOHRtól és CANTORtól idézett szóegyeztetés — ezt már LEPSIUS kiemelte — alig lehet helyes «hiszen csak nem nevezhették el a gúlát az él után». Egyiptomi nyelven *mer*-nek hívták a gúlát és ez az elnevezés semmi összefüggésben sincsen a görög πυραμις szóval. Igaz, hogy a görög név eredete nem világos, de semmi esetre sem származik az egyiptomi Per-em-us szóból, a mely a gúla élét jelentette.

E fejtegetések után az egyik példával kell foglalkoznunk (RHIND-féle papirusz, 56. példa): «Előírás valamely gúla kiszámításához: az alap átlója *(uha tebt)* 360, az él 250 rőf hosszú; mekkora hajlása *(s-qed)*? Felezd meg a 360-at, ez 180-at tesz; azután szorozd meg a 250 számot úgy, hogy 180-at kapj, ez $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{50}$ rőföt ad. Minthogy a rőf 7 kéz széles, szorozd meg a 7 számot $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{50}$-del; a *s-qed* $5\frac{1}{25}$ kéz széles.»

A *S-qed*-et tehát úgy találjuk meg, ha az átló felét a vele érintkező éllel elosztjuk; ez az, a mit fönn az $\frac{EB}{SB}$ viszonynyal fejeztünk ki. Ha e kifejezést x-szel teszszük egyenlővé, akkor ezt is írhatjuk: $EB:SB=x:1$ és ezzel a gúla szerkezete az EB és SB darabokkal meg van adva. Először is a fél átló által meghatározott négyzetes alapsíkot szerkesztjük meg, azután a B ponttól a BE átló irányában az $\frac{EB}{SB}=x$ viszony értékét mérjük föl, ott azután az alapsíkra merőleges vonalat húzunk és B-nél az egységül megállapított rőfmértéket úgy mérjük föl, hogy másik vége a szerkesztett merőleges vonalba beleesik. Ez által megkaptuk az oldalél irányát, és reámérvén az oldalél adott hosszát, megkapjuk a gúla csúcsát, a melyet az alap többi sarkával összekötve meg van a keresett gúla. De ez a módszer valamely gúla fölépítésénél is igen alkalmas, mert szigorúan a fönti fejtegetések értelmében megtaláljuk a többi él irányát is, vagyis azokat az irányokat, a melyeken belül a kivánt gúlát föl kell épiteni.

De a gúla fölépítése másképen is történhetett. A RHIND-féle papirusz egyik példájában adva van a négyzetes alapsík oldala és a gúla magassága. A gúla szerkesztése czéljából a magasságnak az alap felében való viszonyát, tehát az $\frac{SE}{EG}$ értéket határozzuk meg. Ez értéknek a jelentősége a gúla fölépitésére nézve nyilvánvaló, mert ha y-nal teszszük egyenlővé, akkor $SE:EG=y:1$ és ezzel meg van adva az egész szerkesztés. A G ponttól a GE irányban y értékét mérjük föl, az ilyképen nyert pontban merőleges vonalat húzunk, míg G-ben az egységül vett rőföt mérjük reá, még pedig úgy, hogy másik vége az előbb megvont merőlegest érinti. Ez által megkaptuk a gúla oldalának az alapsikhoz való hajlását és a gúla nehézség nélkül fölépithető.

Ilyen módon az is világos, miért nevezték az egyiptomiak mindkét meghatározott viszonyt *s-qed*-nek, mert mindkettő meghatározza a gúla hajlását vagyis emelkedését és e szerint lehetővé teszi a gúla fölépitését.

De még messzebb is mehetünk. $\frac{EB}{SB} = \cos \measuredangle SBE$ és $\frac{SE}{EG} = \operatorname{tang.} \measuredangle SGE$. Majdnem úgy látszik mintha a régi egyiptomiak ezeket a trigonometriai funkcziókat ismerték volna, mert nemcsak két adott elemből — ezek a magasság és alap, vagy magasság és oldalél, vagy az alap átlója és az oldalél, stb. — ki tudták számítani a *s-qed*-et, hanem megfordítva is: az adott *s-qed*-ből és az említett elemek egyikéből kiszámították a többi elemet.

Ha mindezt szem előtt tartjuk, akkor azon tévedések daczára is, a melyekbe az egyiptomiak távlattani ábrázolási képességük fogyatékossága folytán némely föladat megoldásánál beleestek, a tisztelet érzésével kell rólok megemlékeznünk és csak csudálattal szólhatunk tudományos vívmányaikról. Nem hiáb ament Thales, Pythagoras, Plato, knidosi Eudemos, Euklides és még sok más kiváló görög mester Egyiptomba. Itt megismerkedtek az egyiptomiak mathematikai ismereteivel és innen merítettek ösztönzést a további, mélyebb kutatásra. *Mahler Ede.*

Utalványczím: Math. és Phys. Társ. 5997. sz. cheque-számlájára.

Nyugtázások a jövő számban.

Feichtinger Győző,
pénztárnok
(VII., Aréna-út 15.)

A POINCARÉ ELVÉNEK ALKALMAZÁSA A GAUSS-FÉLE DIFFERENCZIÁLEGYENLET BIZONYOS ESETEINEK INTEGRÁLÁSÁRA.

(Harmadik és befejező közlemény.)

II.

A *C)* differencziálegyenletnek általában van legalább egy oly integrálja, mely az S csoport substitutióinak η-ra való alkalmazásánál csak egy-egy állandóval szorzódik.

A bebizonyítás teljesen olyan, mint az I. esetben, azonban az integrálok functionális tulajdonságai némi tekintetben módosulnak.

Mindenekelőtt, ha felteszszük, hogy differencziálegyenletünknek mindkét integrálja: $f_1(\eta)$ és $f_2(\eta)$ másodfajú biperiodikus függvény, azaz eleget tesznek az

$$\left.\begin{array}{l|l} f_1(\eta+2K) = \mu_{11} f_1(\eta) & f_2(\eta+2K) = \mu_{21} f_2(\eta) \\ f_1(\eta+2K'i) = \mu_{12} f_1(\eta) & f_2(\eta+2K'i) = \mu_{22} f_2(\eta) \end{array}\right\} \tag{I}$$

egyenleteknek, annak tekintetbe vételével, hogy $f_1(-\varepsilon^2\eta)$, $f_2(-\varepsilon^2\eta)$ is integrálja a *C)* differencziálegyenletnek, teljesen úgy, mint az I. esetben, nyerjük, hogy

$$\mu_{11} = \mu_{12} = \mu_{21} = \mu_{22} = \pm 1,$$

azaz az egymással egyenlő μ állandók értéke csak valamelyik második egységgyök lehet.

Minthogy azonban differencziálegyenletünk akkor sem változik, ha η helyébe $\varepsilon^2\eta$ lép, $f_1(\varepsilon^2\eta)$ és $f_2(\varepsilon^2\eta)$ szintén integrálok lesznek, tehát léteznek oly c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} állandók, hogy

$$\left.\begin{array}{l} f_1(\varepsilon^2\eta) = c_{11} f_1(\eta) + c_{12} f_2(\eta) \\ f_2(\varepsilon^2\eta) = c_{21} f_1(\eta) + c_{22} f_2(\eta) \end{array}\right\} \tag{II}$$

Ha ez egyenleteknek valamelyikében, pl. az elsőben η helyére $(\eta+2K)$-t, majd $(\eta+2K'i)$-t irunk, az (I) egyenleteknek felhasználásával a következő eredményhez jutunk:

$$\mu_{11}\mu_{12}=1, \quad \mu_{11}=\mu_{21}$$
$$\mu_{12}^2=\mu_{21}, \quad \mu_{12}=\mu_{22}.$$

Ez egyenletek közül az elsőnek és harmadikának összeszorzásából következik, hogy

$$\mu_{12}^3=1,$$

tehát μ_{12} harmadik egységgyök, mivel azonban

$$\mu_{11}=\mu_{21}=\frac{1}{\mu_{12}}=\frac{1}{\mu_{22}},$$

látjuk, hogy mindegyik állandó csak harmadik egységgyök lehet. Előbb azonban azt láttuk, hogy ez állandók mindegyikének második egységgyöknek kell lennie, s mivel ezen kívül harmadik egységgyökök is és mind egymással egyenlők, ennélfogva közös értékük csak $+1$ lehet.

Jelen esetben tehát a két integrál functionális tulajdonságai:

$$\left.\begin{aligned} f_k(\eta+2K) &= f_k(\eta) \\ f_k(\eta+2K'i) &= f_k(\eta) \end{aligned}\right\} k=1,\ 2,$$

azaz a két integrál nemcsak másod, hanem $2K$ és $2K'i$ periodusokkal biró elsőfajú biperiodikus függvény.

Ha tényleg mindkét integrál ily tulajdonságú, akkor a differencziálegyenletnek minden integrálja elsőfajú biperiodikus függvény s két oly alaprendszert alkotó integrál létezik, melyek egy-egy állandóval szorzódnak, ha η egy hatodik egységgyökkel $[(-\varepsilon^2)^k]$ szorzódik.

Minthogy azonban általában a differencziálegyenletnek csak egy integrálja lehet elsőfajú biperiodikus függvény, jelen okoskodásunk általában ellenmondáshoz vezet, ezért külön kell még azon feltételből kiindulni, hogy csak egy másodfajú biperiodikus integrál létezik.

Az I. esetben használt bebizonyitási módot követve, eredmény gyanánt azt nyerjük, hogy e másodfajú biperiodikus függvénynek feltételezett integrál közönséges elliptikus függvény $2K$ és $2K'i$ periodusokkal, s hogy csak egy állandóval és pedig egy hatodik egységgyökkel szorzódik, ha η helyére $-\varepsilon^2\eta$ lép, azaz eme functionális tulajdonságokkal bir:

$$\begin{aligned} f(\eta+2K) &= f(\eta) \\ f(\eta+2K'i) &= f(\eta) \\ f(-\varepsilon^2\eta) &= (-\varepsilon^2)^k f(\eta). \end{aligned} \qquad F)$$

A *C)* differencziálegyenletnek tehát általában van egy, egyes speczialis esetekben pedig két oly integrálja, mely az *F)* alatti functionális egyenleteknek eleget tesz. Megjegyzendő, hogy itt sincs kizárva oly különös eseteknek fellépése sem, melyekben az integrálok másodfajú biperiodikus függvények, de az *F)* egyenletek harmadikát nem elégitik ki.

III.

Az integráloknak meghatározása czéljából egyelőre itt is elegendő azokra az esetekre szoritkoznunk, midőn a_1 és a_2 pozitiv, ekkor az integráloknak csak az $\eta = 0$ pontban lesz polusok. A másodfajú biperiodikus integrálok alakja tehát:

$$y = e^{\lambda v} \prod_{k=1}^{m} \frac{\vartheta_1(v-a_k)}{\vartheta_1(v)}; \quad v = \frac{\eta}{2K},$$

hol $-m$ az $\eta=0$ ponthoz tartozó determináló alapegyenletnek valamelyik negativ gyöke.

Hogy ez integrálnak zéruspontjai milyenek lehetnek, hogy az a megállapitott tulajdonságokkal birjon, arról a ϑ függvények lineár transformatiója, illetőleg az elliptikus függvények komplex multiplicátiója alapján győződhetünk meg. E szerint:

$$e^{-\pi i\varepsilon^2 v^2}\vartheta_1(\varepsilon^2 v) = c \,.\, e^{-\frac{5\pi i}{4}}\vartheta_1(v)$$

$$e^{-\pi i\varepsilon^2 v^2}\vartheta_0(\varepsilon^2 v) = c \,.\, e^{-\frac{\pi i}{4}}\vartheta_2(v)$$

$$e^{-\pi i \varepsilon^2 v^2}\vartheta_2(\varepsilon^2 v) = c\,.\,\vartheta_3(v)$$
$$e^{-\pi i \varepsilon^2 v^2}\vartheta_3(\varepsilon^2 v) = c\,.\,\vartheta_0(v).\text{*}$$

Ennek alapján:

$$sn\ \varepsilon^2\eta = \varepsilon^2\frac{sn\,\eta}{cn\,\eta}$$
$$cn\ \varepsilon^2\eta = \frac{dn\,\eta}{cn\,\eta}$$
$$dn\ \varepsilon^2\eta = \frac{1}{cn\,\eta}\,.$$

Ha az integrálnak $v = a$ egy a differencziálegyenlet singuláris pontjaitól különböző zéruspontja, akkor kell, hogy $\varepsilon^2 a$, $\varepsilon^4 a$, $-a$, $-\varepsilon^2 a$, $-\varepsilon^4 a$ is zéruspontja legyen az integrálnak. Ezen zéruspontok mind elsőrendűek.

A ϑ függvények transformátiójából következik továbbá, hogy ha $v = \frac{1}{2}$ μ-edrendű zéropont, akkor $v = \frac{\tau}{2}$ és $v = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}$-nek s ily rendszámú zéruspontnak kell lenni, azaz az $x=0$ értéknek megfelelő singuláris pontok egyenlő rendszámú zéruspontjai az *F)* tulajdonsággal biró integrálnak. Hasonlóképen az $x=1$-nek megfelelő $v = \frac{-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$ és $v = \frac{-2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$ pontok környezetében is egyenlő viselkedésű az integrál. Ennek igazolása végett ki kell mutatnunk, hogy

$$\frac{\vartheta_1\left(v + \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right).\,\vartheta_1\left(v + \frac{2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)}{\vartheta_1^2(v)}$$

bizonyos exponencziális tényezőtől eltekintve az *F)* alatti functionális feltételeket kielégíti. Tekintettel arra, hogy

$$\frac{2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} = -\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} - 1 + \varepsilon^2,$$

---

* V. ö. KOENIGSBERGER: II. 69. l., hol a VI. alatti képletsorozatban

$$a_0=0,\quad a_1=-1,\quad b_0=1,\quad b_1=-1$$

irandó.

a számláló egy exponencziális faktortól eltekintve a következő:

$$\vartheta_1\left(v+\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right).\vartheta_1\left(v-\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right).$$

E szorzat más alakban irható a ϑ függvények összeadási tételének felhasználásával, mely szerint:*

$$\vartheta_2^2\vartheta_1\left(v+\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right).\vartheta_1\left(v-\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)=$$

$$=\vartheta_2^2\left(\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)\vartheta_0^2(v)-\vartheta_0^2\left(\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)\vartheta_2^2(v)=$$

$$=\vartheta_0^2\left(\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)\left[\vartheta_0^2(v)-\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_2^2}\vartheta_2^2(v)\right].$$

Ebből az előállításból könnyen látható, hogy a fenti hányados exponencziális tényezőtől s egy állandótól eltekintve nem más, mint

$$\frac{1-\varepsilon^2 cn^2\eta}{sn^2\eta},$$

tehát tényleg kielégíti az *F)* alatti functionális egyenleteket.

Mindezeknek megfontolásával kapjuk, hogy az S csoport substitutióinak η-ra való alkalmazásánál állandóval szorzódó integrálnak alakja:

$$y=\frac{\vartheta_0^\mu(v)\,\vartheta_2^\mu(v)\,\vartheta_3^\mu(v)\left[\vartheta_0^2(v)-\frac{\vartheta_0^2}{\vartheta_2^2}\varepsilon^2\vartheta_2^2(v)\right]^\nu}{\vartheta_1^{3\mu+2\nu}(v)}\prod_{\lambda=1}^{\varrho}\prod_{k=1}^{6}\frac{\vartheta_1\left[v-(-\varepsilon^2)^k a_\lambda\right]}{\vartheta_1(v)},$$

hol

$$\rho=\frac{m-3\lambda-2\nu}{6}$$

és $-m$ jelenti az $\eta=0$ ponthoz tartozó alapegyenletnek valamelyik negativ gyökét.

A ϑ függvények helyett az elliptikus függvényeket vezetvén be, az integrál alakja:

---

* L. KOENIGSBERGER: I. 379. l.

$$y=\frac{cn^{\mu}\eta\, dn^{\mu}\eta\,(1-\varepsilon^2 cn^2\eta)^{\nu}}{sn^{3\lambda+2\nu}\eta}R\left(3(1-\varepsilon^2)\,\varepsilon^2\,\frac{cn^2\eta\, dn^2\eta}{sn^6\eta}\right),$$

hol R egy ρ adfokú egész raczionális függvénynek a symboluma. A μ és ν értékeit illetőleg jegyezzük meg, hogy

$$\mu=0, \quad \text{vagy} \quad a_1$$
$$\nu=0, \quad \text{vagy} \quad a_2.$$

Most már meghatározhatjuk az *F)* functionális tulajdonságokkal biró integrálokat.

Jelöljük $-m$ és $-n$-el az $\eta=0$ singuláris ponthoz tartozó alapegyenletek gyökeit, akkor

$$m=\frac{a_3+2a_2+3a_1-6}{2}, \quad n=\frac{-a_3+2a_2+3a_1-6}{2},$$

s hozzuk be ismét a következő jelölést:

$$m_1=\frac{a_3+2a_2-3a_1-6}{2}, \quad n_1=\frac{-a_3+2a_2-3a_1-6}{2},$$
$$m_2=\frac{a_3-2a_2+3a_1-6}{2}, \quad n_2=\frac{-a_3-2a_2+3a_1-6}{2},$$
$$m_3=\frac{a_3-2a_2-3a_1-6}{2}, \quad n_3=\frac{-a_3-2a_2-3a_1-6}{2}.$$

A differencziálegyenletnek egyik integrálja egy homogén lineár elsőrendű differencziálegyenletnek fog eleget tenni, azaz csak állandóval szorzódik az S csoport substitutióinak η-ra való alkalmazásánál, ha az

$$\left.\begin{aligned} m &= -n_3-6\equiv 0\\ m_1 &= -n_2-6\equiv 0\\ m_2 &= -n_1-6\equiv 0\\ m_3 &= -n\;\,-6\equiv 0\end{aligned}\right\}\ (\text{mod. } 6)$$

kongruencziák valamelyike teljesül. Minden esetben vagy az egyik m, vagy a vele mod. 6 kongruens n pozitiv, illetőleg zérus.

*

Vegyük már most az egyes eseteket:

1. $m \equiv n_3 \equiv 0$, (mod. 6), azaz

$$a_3 + 2a_2 + 3a_1 - 6 \equiv 0 \text{ (mod. 12)}.$$

E kongruencziának megoldásai:

$$\begin{aligned}
a_1 &\equiv 0 \text{ (mod. 4)}\\
a_2 &\equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \text{ (mod. 6)}\\
a_3 &\equiv 6,\ 4,\ 2,\ 0,\ 10,\ 8 \text{ (mod. 12)}\\
a_1 &\equiv 1 \text{ (mod. 4)}\\
a_2 &\equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \text{ (mod. 6)}\\
a_3 &\equiv 3,\ 1,\ 11,\ 9,\ 7,\ 5 \text{ (mod. 12)}\\
a_1 &\equiv 2 \text{ (mod. 4)}\\
a_2 &\equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \text{ (mod. 6)}\\
a_3 &\equiv 0,\ 10,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2 \text{ (mod. 12)}\\
a_1 &\equiv 3 \text{ (mod. 4)}\\
a_2 &\equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \text{ (mod. 6)}\\
a_3 &\equiv 9,\ 7,\ 5,\ 3,\ 1,\ 11 \text{ (mod. 12)}
\end{aligned}$$

Ha a_1 és a_2 pozitiv, m mindig pozitiv, mert a_3 mindig pozitivnak vehető, a mennyiben t. i. a differencziálegyenletben ennek csak négyzete fordul elő.

a) Ha $m = -6\beta \leqq 0$, (β negativ egész szám vagy zérus), az integrál ekkor x-nek egész raczionális függvénye, melynek fokszáma $\frac{m}{6}$.

$$y_1 = f_1(\eta) = F\left(\beta, a, \gamma, 3(1-\varepsilon^2)\varepsilon^2 \frac{cn^2\eta\, dn^2\eta}{sn^6\eta}\right).$$

Ez az integrál az S csoport összes substitutióinak η-ra való alkalmazásánál változatlanul marad.

b) Ha $n_3 = 6(\beta-1) \geqq 0$, (β pozitiv egész szám), akkor az integrál tartalmazza, mint szorzótényezőt a

$$\frac{cn^{a_1}\eta\, dn^{a_1}\eta\,(1-\varepsilon^2 cn^2\eta)^{a_2}}{sn^{3a_1+2a_2}\eta}$$

kifejezést, a másik szorzótényező pedig raczionális egész függvénye az x-nek. Az

$$y = \frac{cn^{\alpha_1}\eta\, dn^{\alpha_1}\eta\,(1-\varepsilon^2 cn^2\eta)^{\alpha_2}}{sn^{3\alpha_1+2\alpha_2}\eta} \cdot z$$

substitutióval ezen eset az előbbenire vihető vissza, s lesz

$$y_1 = f_1(\eta) = \frac{cn^{\alpha_1}\eta\, dn^{\alpha_1}\eta\,(1-\varepsilon^2 cn^2\eta)^{\alpha_2}}{sn^{3\alpha_1+2\alpha_2}\eta} F(1-\beta,\ 1-\alpha,\ 2-\gamma,\ x)$$

és

$$f_1\big((-\varepsilon^2)^k\eta+\mu\,.\,2K+\nu\,.\,2Ki\big) = (-\varepsilon)^{k(3\alpha_1+2\alpha_2)} f_1(\eta).$$

2. $m_1 \equiv n_2 \equiv 0$ (mod. 6). azaz

$$a_3+2a_2-3a_1-6 \equiv 0 \ (\text{mod. } 12).$$

E kongruencziának megoldásai:

$a_1 \equiv 0$ (mod. 4)
$a_2 \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ (mod. 6)
$a_3 \equiv 6,\ 4,\ 2,\ 0,\ 10,\ 8$ (mod. 12)

$a_1 \equiv 1$ (mod. 4)
$a_2 \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ (mod. 6)
$a_3 \equiv 9,\ 7,\ 5,\ 3,\ 1,\ 11$ (mod. 12)

$a_1 \equiv 2$ (mod. 4)
$a_2 \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ (mod. 6)
$a_3 \equiv 0,\ 10,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2$ (mod. 12)

$a_1 \equiv 3$ (mod. 4)
$a_2 \equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ (mod. 6)
$a_3 \equiv 3,\ 1,\ 11,\ 9,\ 7,\ 5$ (mod. 12)

a) Ha $m_1 = 6(\gamma-\beta-1) \geq 0$, ($\gamma-\beta$ pozitiv egész szám), akkor az integrál

$$y_1 = f_1(\eta) = \frac{cn^{\alpha_1}\eta\, dn^{\alpha_1}\eta}{sn^{3\alpha_1}\eta} F(\beta-\gamma+1,\ \alpha-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ x)$$

és

$$f_1 = \big((-\varepsilon^2)^k\eta+\mu\,.\,2K+\nu\,.\,2K'i\big) = (-\varepsilon)^{3k\alpha_1} f_1(\eta) = (-1)^{k\alpha_1} f_1(\eta).$$

b) Ha $n_2 = 6(\beta-\gamma) \geq 0$, ($\beta-\gamma$ pozitiv egész szám vagy zérus), az integrál:

$$y_1 = f_1(\eta) = \frac{(1-\varepsilon^2 cn^2\eta)^{\alpha_2}}{sn^{2\alpha_2}\eta} F(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma,\ x)$$

s functionális tulajdonságai:

$$f_1\big((-\varepsilon^2)^k\eta+\mu\,.\,2K+\nu\,.\,2K'i\big)=(-\varepsilon)^{2k\alpha_2}f_1(\eta).$$

3. $m_2\equiv n_1\equiv 0$ (mod. 6), azaz

$$\alpha_3-2\alpha_2+3\alpha_1-6\equiv 0 \pmod{12}.$$

E kongrueneziának megoldásai:

$\alpha_1\equiv 0$ (mod. 4)
$\alpha_2\equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ (mod. 6)
$\alpha_3\equiv 6,\ 8,\ 10,\ 0,\ 2,\ 4$ (mod. 12)

$\alpha_1\equiv 1$ (mod. 4)
$\alpha_2\equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ (mod. 6)
$\alpha_3\equiv 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 1$ (mod. 12)

$\alpha_1\equiv 2$ (mod. 4)
$\alpha_2\equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ (mod. 6)
$\alpha_3\equiv 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10$ (mod. 12)

$\alpha_1\equiv 3$ (mod. 4)
$\alpha_2\equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ (mod. 6)
$\alpha_3\equiv 9,\ 11,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7$ (mod. 12)

a) Ha $m_2=6(\alpha-\gamma)\geqq 0$, ($\alpha-\gamma$ pozitiv egész szám vagy zérus), az integrál:

$$y_1=f_1(\eta)=\frac{(1-\varepsilon^2cn^2\eta)^{\alpha_2}}{dn^{2\alpha_2}\eta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ x).$$

A Gauss-féle sor egy $(\alpha-\gamma)$-adfokú egész raczionális függvény, az integrál functionális tulajdonságai a 2. *b)* alattiéval egyeznek, azonban ez egy $(\beta-\gamma)$-adfokú egész raczionális függvény.

b) Ha $n_1=6(\gamma-\alpha-1)\geqq 0$, ($\gamma-\alpha$ pozitiv egész szám), akkor az integrál:

$$y_1=f_1(\eta)=\frac{cn^{\alpha_1}\eta\,dn^{\alpha_1}\eta}{sn^{3\alpha_1}\eta}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ x)$$

s functionális tulajdonságai a 2. *a)* alatt találhatók.

4. $m_3\equiv n\equiv 0$ (mod. 6), azaz

$$\alpha_3-2\alpha_2-3\alpha_1-6\equiv 0 \pmod{12}.$$

E kongruencziának megoldásai:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &\equiv 0 \ (\text{mod. } 4)\\ \alpha_2 &\equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ (\text{mod. } 6)\\ \alpha_3 &\equiv 6, 8, 10, 0, 2, 4 \ (\text{mod. } 12)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &\equiv 1 \ (\text{mod. } 4)\\ \alpha_2 &\equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ (\text{mod. } 6)\\ \alpha_3 &\equiv 9, 11, 1, 3, 5, 7 \ (\text{mod. } 12)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &\equiv 2 \ (\text{mod. } 4)\\ \alpha_2 &\equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ (\text{mod. } 6)\\ \alpha_3 &\equiv 0, 2, 4, 6, 8, 10 \ (\text{mod. } 12)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &\equiv 3 \ (\text{mod. } 4)\\ \alpha_2 &\equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5 \ (\text{mod. } 6)\\ \alpha_3 &\equiv 3, 5, 7, 9, 11, 1 \ (\text{mod. } 12)\end{aligned}$$

a) Ha $m_3 = 6(\alpha - 1) \geqq 0$, ($\alpha$ pozitiv egész szám), az integrál

$$y_1 = f_1(\eta) = \frac{cn^{\alpha_1}\eta \, dn^{\alpha_1}\eta \, (1 - \varepsilon^2 cn^2\eta)^{\alpha_2}}{sn^{3\alpha_1 + 2\alpha_2}\eta} F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, x).$$

b) Ha $n = -4\alpha \geqq 0$, (α negativ egész szám vagy zérus), akkor az integrál:

$$y_1 = f_1(\eta) = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

egy $(-\alpha)$-adik fokszámú egész raczionális függvénye x-nek.

A négy kongruencziának megoldásait szolgáltató α értékek mellett differencziálegyenletünknek legalább egyik integrálja az *F)* alatti functionális tulajdonságokkal bír.

Közelebbről vizsgálva a négy kongruencziának megoldásait, itt is azt találjuk, hogy ha a determináló alapegyenletek gyökei oly törtek, melyeknek számlálói és nevezői relativ törzsszámok, akkor minden esetben létezik egy, de csakis egy oly integrál, mely az S csoport substitutióinak η-ra való alkalmazásánál csak egy-egy állandóval szorzódik. A másik integrál pedig, illetőleg a két, alaprendszert alkotó integrálnak hányadosa egy elliptikus integrál, mely az η-val és másodfajú integrálokkal lineáris módon fejezhető ki.

Az $a_1+a_3 \equiv 0 \pmod{2}$ kongruencziát kielégítő következő értékek:

$$a_1 \equiv 0 \pmod{4}$$
$$a_2 \equiv 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5 \pmod{6}$$
$$a_3 \equiv 6,\ 4,\ 8,\ 2,\ 10,\ 0,\ 2,\ 10,\ 4,\ 8 \pmod{12}$$

$$a_1 \equiv 2 \pmod{4}$$
$$a_2 \equiv 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5 \pmod{6}$$
$$a_3 \equiv 0,\ 2,\ 10,\ 4,\ 8,\ 6,\ 4,\ 8,\ 2,\ 10 \pmod{12}$$

$$a_1 \equiv 1 \pmod{2}$$
$$a_2 \equiv 0 \pmod{3}$$
$$a_3 \equiv 3 \pmod{6}$$

— a mint könnyen belátható — két-két kongruencziát elégitenek ki, ennélfogva ezen értékek mellett — azoktól az esetektől eltekintve, a melyekben az egyik integrál logarithmust tartalmaz — mindkét integrál az *F)* alatti tulajdonságokkal bír.

Ezekben az esetekben az $\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \frac{a_3}{6}$ gyökkülönbségek közül vagy az egyik vagy mind a három egész szám, hozzá tévén még, hogy ha csak az egyik singuláris ponthoz tartozó gyökök különbsége egész szám, akkor $\frac{a_3}{6}$-nak reducibilis törtnek kell lenni.

Ezzel azonban nem jellemezhetők azok az esetek, melyek kétkét kongruencziát elégítenek ki, előbbeni kijelentésünk csak szükséges, de nem elegendő feltételt szab ki, a mennyiben t. i. az ugyanily tulajdonságú következő a értékek:

$$a_1 \equiv 0 \pmod{4}$$
$$a_2 \equiv 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5 \pmod{6}$$
$$a_3 \equiv 0,\ 2,\ 10,\ 4,\ 8,\ 6,\ 4,\ 8,\ 2,\ 10 \pmod{12}$$

$$a_1 \equiv 2 \pmod{4}$$
$$a_2 \equiv 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5 \pmod{6}$$
$$a_3 \equiv 6,\ 4,\ 8,\ 2,\ 10,\ 0,\ 2,\ 10,\ 4,\ 8 \pmod{12}$$

egyik kongruencziát sem elégitik ki. Ekkor, valamint azokban az esetekben, midőn az $\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \frac{a_3}{6}$ számok közül kettő egész szám, avagy csak az egyik egész szám, de a_3-nak a 6-tal közös osztója nincs, az egyik integrál okvetetlenül logarithmust tartalmaz; s minthogy a logarithmusi singuláritással nem biró integrál sem elégiti ki az *F)* alatti egyenleteket, állíthatjuk, hogy ez sem lehet biperiodikus függvény.

Végül itt is lépnek fel oly esetek, a melyekben egyik integrál sem bír az *F)* alatti functionális tulajdonságokkal, jóllehet a determináló alapegyenletek gyökeinek különbségei között nincs egész szám. Ez bekövetkezik akkor, ha az $\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \frac{a_3}{6}$ számok közül valamelyik reducibilis tört, természetesen ilyen csak a legutolsó lehet. Ezeket az eseteket az $a_3 \equiv 3 \pmod{6}$ értékek szolgáltatják, mivel a_3-nak más értékei mellett a determináló alapegyenletek gyökeinek különbségei nem lehetnek reducibilisek a nélkül, hogy közöttük egész szám ne fordulna elő. Mindkét integrál lehet másodfajú biperiodikus függvény, s ha az egyik ismeretes, a másik azonnal felirható. Pl. $a_1=1$, $a_3=3$ és a_2 tetszőleges értéke mellett a differencziálegyenlet:

$$\frac{d^2y}{d\eta^2} - 2(a_2-1)\frac{(\varepsilon^2-1)\,cn\,\eta\,dn\,\eta}{sn\,\eta(1-\varepsilon^2cn^2\eta)}\frac{dy}{d\eta} + \\ + \frac{a_2(a_2-3)}{3}\frac{(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^2cn^2\eta)}{sn^2\eta}\,y = 0.$$

Ennek egyik integrálja:

$$y_1 = \left(\sqrt[3]{\frac{sn^3\eta + \varepsilon\sqrt{3(1-\varepsilon^2)}\,cn\,\eta\,dn\,\eta}{sn^3\eta}}\right)^{a_2},$$

miről y_1-nek a differencziálegyenletbe való helyettesítésével győződhetünk meg. Az integrál egy másodfajú háromszögfüggvény, mely egy-egy harmadik egységgyökkel szorzódik, ha η a periodusokkal szaporodik vagy ha ε^k-val (egy harmadik egységgyökkel) szorzódik, de lényegesen változik, ha η $(-\varepsilon)^k$-val (azaz egy hatodik egységgyökkel) szorzódik és így nem bír az *F)* alatti functionális tulajdonságokkal.

A felirt y_1 integrál η-nak — úgy látszik — többértékű függvénye, de mint majd a III. esetben látni fogjuk, a gyökjel eltávolitható.

Az y_1-el alaprendszert alkotó másik integrált nyerjük, ha pl. y_1-ben η helyére $-\eta$-át irunk s lesz

$$y_2 = \left(\sqrt[3]{\frac{sn^3\eta - \varepsilon\sqrt{3(1-\varepsilon^2)}\,cn\,\eta\,dn\,\eta}{sn^3\eta}}\right)^{\alpha_2}.$$

Ha α_2 nem osztható 3-mal, akkor a két integrál között nincs oly lineár kapcsolat, a mely az *F)* alatti functionális tulajdonságokat kielégitő függvényt szolgáltatna.

IV.

A második integrál itt is egyszerű quadraturával állitható elő. Ha a *C)* differencziálegyenletbe ismét az

$$y = y_1 \cdot u$$

egyenlet segitségével új függő változót vezetünk be, az I. eset *) alatti egyenletéhez jutunk, a melyből, mivel most

$$-\int p d\eta = \log \frac{cn^{\alpha_1-1}\eta\, dn^{\alpha_1-1}\eta\,(1-\varepsilon^2 cn^2\eta)^{\alpha_2-1}}{sn^{3(\alpha_1-1)+2(\alpha_2-1)}\eta},$$

kétszeri integrálással u számára a következő elliptikus integrált kapjuk:

$$u = \frac{y_2}{y_1} = c\,.\int \frac{1}{y_1^2}\,\frac{cn^{\alpha_1-1}\eta\, dn^{\alpha_1-1}\eta\,(1-\varepsilon^2 cn^2\eta)^{\alpha_2-1}}{sn^{3(\alpha_1-1)+2(\alpha_2-1)}\eta}\,dy + c'.$$

Az integráczió állandóit, mivel y_2-től csak annyit követelünk meg, hogy y_1-el alaprendszert alkosson, válaszszuk a következőkép:

$$c = 1, \quad c' = 0.$$

Az állandók ilyen választása mellett az integrálhányados csak egy hatodik egységgyökkel szorzódik, ha η helyére $-\varepsilon^2\eta$ lép, ha pedig η a periodusokkal szaporodik, akkor az integrálhányadoshoz az őt előállitó elliptikus integrál periodiczitási modulusai járulnak.

Ily módon minden egyes esetben nehézség nélkül előállíthatók ama substitutiók, a melyeket az általunk felállított, egymással alaprendszert alkotó két integrál szenved.

*

Példa gyanánt vegyük azt az esetet, midőn

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 5,$$

ekkor az *F)* egyenleteket kielégítő integrál a 2. *a)* szerint

$$y_1 = f_1(\eta) = \frac{cn\,\eta\, dn\,\eta}{sn^3\eta}$$

és így a két alaprendszert alkotó integrálnak hányadosa:

$$f(\eta) = \frac{y_2}{y_1} = \int_0^\eta \frac{sn^4\eta\,(1-\varepsilon^2 cn^2\eta)}{cn^2\eta\, dn^2\eta}\, d\eta.$$

Az integrálandó függvény csak egy hatodik egységgyökkel szorzódik, ha η is egy hatodik egységgyökkel szorzódik, s mivel ezenkívül az $\eta = 0$ helyen negyedrendű zérushelye van, ennélfogva e pont környezetére vonatkozó hatványsor kifejtése ilyen:

$$(1-\varepsilon^2)\,\eta^4 + c_1\eta^{10} + c_2\eta^{16} + \cdots$$

és így az integrálnak sorfejtése az ötödik hatványnyal kezdődik, tehát ha η helyére $-\varepsilon^2\eta$ lép, az integrál $(-\varepsilon^2)^5$-el, azaz $(-\varepsilon)$-al szorzódik, úgy hogy

$$f\big((-\varepsilon^2)^k\eta + \mu\,.\,2K + \nu\,.\,2Ki\big) = (-\varepsilon)^k f(\eta) + \mu\,.\,\Omega + \nu\,.\,\Omega',$$

ha Ω és Ω' jelölik az elliptikus integrál periodiczitási modulusait.

Fejezzük ki az integrálhányadost ϑ függvényekkel és azok deriváltjaival. Az integrálandó függvénynek három másodrendű polusa van és pedig: K, $K'i$, $K + K'i$. Az ezen polusok körüli sorkifejtésekben, mivel egyik integrálnak sincs logarithmusi singuláris pontja, a (-1)-ik hatvány hiányzik. Az általános elmélet szerint tehát:

$$\frac{sn^4\eta(1-\varepsilon^2 cn^2\eta)}{cn^2\eta\, dn^2\eta} = C + \frac{d}{d\eta}\left[c_1 \frac{\vartheta_1'\left(v-\frac{1}{2}\right)}{\vartheta_1\left(v-\frac{\tau}{2}\right)} + c_2 \frac{\vartheta_1'\left(v-\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(v-\frac{\tau}{2}\right)} + \right.$$

$$\left. + c_3 \frac{\vartheta_1'\left(v-\frac{1}{2}-\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1\left(v-\frac{1}{2}-\frac{\tau}{2}\right)}\right] =$$

$$= C + \frac{d}{d\eta}\left[c_1 \frac{\vartheta_2'(v)}{\vartheta_2(v)} + c_2 \frac{\vartheta_0'(v)}{\vartheta_0(v)} + c_3 \frac{\vartheta_3'(v)}{\vartheta_3(v)}\right].$$

A c_1, c_2, c_3 állandókat meghatározzuk, ha jobb és baloldalt a singuláris pontok környezetében sorbafejtünk, midőn is a (-2)-ik hatványok összehasonlításából nyerjük, hogy

$$c_1 = c_2 = c_3 = -\frac{\varepsilon}{2K}.$$

A C állandót pedig az $\eta=0$ pont körüli sorbafejtésből határozhatjuk meg és pedig tekintettel arra, hogy a baloldal sorbafejtésében állandó tag nincs, a jobb oldalon az állandó tag nullátétele szolgáltatja a C értékét.

$$C = -\frac{1}{2K}\left(c_1 \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_2} + c_2 \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_0} + c_3 \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{4K^2}\left(\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} + \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3}\right).$$

A transformátiós képleteknek kétszeri deriválásával s $v=0$ helyettesítésével e hányadosok között fennálló következő egyenletekhez jutunk:

$$\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} = 2\pi i\varepsilon + \varepsilon^2 \frac{\vartheta''}{\vartheta_3}$$

$$\frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} = 2\pi i\varepsilon + \varepsilon^2 \frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2}$$

$$\frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} = 2\pi i\varepsilon + \varepsilon^2 \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0},$$

honnan

$$\frac{\vartheta_2''}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta_0''}{\vartheta_0} + \frac{\vartheta_3''}{\vartheta_3} = \frac{6\pi i\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$$

és így
$$C = \frac{3\pi i \varepsilon^2}{2K^2}.$$

Tehát a két integrálnak hányadosa:

$$f(\eta) = \frac{y_2}{y_1} = \frac{3\pi i \varepsilon^2}{2K^2}\eta - \frac{\varepsilon}{2K}\left[\frac{\vartheta'_2(v)}{\vartheta_2(v)} + \frac{\vartheta'_0(v)}{\vartheta_0(v)} + \frac{\vartheta'_3(v)}{\vartheta_3(v)}\right].$$

Ez alakból következik, hogy

$$f(\eta+2K) = f(\eta) + \frac{3\pi i \varepsilon^2}{K}$$
$$f(\eta+2K'i) = f(\eta) + 0$$
$$f(-\varepsilon^2\eta) = -\varepsilon f(\eta),$$

ennélfogva az elliptikus integrál periodiczitási modulusai:

$$\Omega = \frac{3\pi i \varepsilon^2}{K}, \quad \Omega' = 0,$$

azaz az integrálok hányadosának s így y_2-nek is $2K'i$ periodusa.

Az $y_1 = f_1(\eta)$, $y_2 = f_2(\eta)$ integrálok az S csoport substitutióinak η-ra való alkalmazásánál a következő változásokat szenvedik:

$$f_1[(-\varepsilon^2)^k\eta + \mu \,.\, 2K + \nu \,.\, 2K'i] = (-1)^k f_1(\eta)$$
$$f_2[(-\varepsilon^2)^k\eta + \mu \,.\, 2K + \nu \,.\, 2K'i] = (-1)^k \,.\, \mu\Omega \,.\, f_1(\eta) + \varepsilon^k f_2(\eta).$$

III. eset.

I.

A determináló alapegyenletek gyökeinek nevezői: 3, 3, 3; a gyökök különbségei legyenek:

$$1-\gamma = \frac{a_1}{3}, \quad \gamma - \alpha - \beta = \frac{a_2}{3}, \quad \alpha - \beta = \frac{a_3}{3}$$

s így a Gauss-féle differencziálegyenlet lesz:

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + \left[1 - \frac{a_1}{3} + \frac{6-a_2-a_1}{3}x\right]\frac{dy}{dx} - \\ - \frac{(3-a_1-a_2)^2 - a_3^2}{36}\,y = 0. \qquad A)$$

A 0, 1, ∞ singuláris pontokhoz tartozó determináló alapegyenletek gyökei:

$$0, \frac{a_1}{3}; \quad 0, \frac{a_2}{3}; \quad \frac{3-a_1-a_2+a_3}{6}, \quad \frac{3-a_1-a_2-a_3}{6};$$

ennélfogva arra, hogy az *A)* egyenlet integráljai az

$$x(1-x)u'' + (\tfrac{2}{3}-\tfrac{4}{3}x)u' = 0 \qquad a)$$

differencziálegyenlet* integrálhányadosának egyértékű függvényei legyenek, szükséges, hogy

$$a_1+a_2+a_3 \equiv 1 \text{ (mod. 2)}$$

legyen.

Az *a)* egyenlet független változója az integrálhányadossal így volt előállítva:

$$x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3(1-\varepsilon^2)}\, sn\,\eta\, cn\,\eta\, dn\,\eta, \qquad k^2 = -\varepsilon^2$$

s ez nem változik, ha η-ra az

$$S_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon K \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\varepsilon K \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

substitutiókat és azok megfordításait alkalmazzuk.

Ismét tegyünk η helyére $(\eta+2K'i)$-t, midőn is

$$x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\varepsilon\sqrt{3(1-\varepsilon^2)}\frac{cn\,\eta\, dn\,\eta}{sn^3\eta} \qquad B)$$

s a substitutiók általános alakja:

$$S = \begin{pmatrix} \varepsilon^k & m.2K+n.2K'i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{array}{l} k = 0, 1, 2 \\ m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \end{array}$$

azaz a *B)* alatt levő biperiodikus függvény a $2K$ és $2K'i$ periodusokkal bír s ezen kívül nem változik, ha η egy harmadik egységgyökkel szorzódik.

Az *A)* egyenletbe a *B)* reláczió segítségével η-át új független változó gyanánt bevezetve, a differencziálegyenlet lesz:

---

* L. Math. és Phys. Lapok, X. 369. l. s köv.

$$\frac{d^2y}{d\eta^2}-\frac{\varepsilon^2\sqrt{3(1-\varepsilon^2)}}{3}\left[(a_1-1)\frac{sn^3\eta-\varepsilon\sqrt{3(1-\varepsilon^2)}\,cn\,\eta\,dn\,\eta}{sn\,\eta\,(1-\varepsilon^2cn^2\eta)}-\right.$$
$$\left.-(a_2-1)\frac{sn^3\eta+\varepsilon\sqrt{3(1-\varepsilon^2)}\,cn\,\eta\,dn\,\eta}{sn\,\eta\,(1-\varepsilon^2cn^2\eta)}\right]\frac{dy}{d\eta}-$$
$$-\frac{(3-a_1-a_2)^2-a_3^2}{12}\cdot\frac{\varepsilon(1-\varepsilon^2)(1-\varepsilon^2cn^2\eta)}{sn^2\eta}\,y=0. \qquad C)$$

Ez ismét egy Picard-féle differencziálegyenlet, az együtthatók $2K$ és $2K'i$ szerint biperiodikus függvények. Az egyenlet singuláris pontjai, valamint az ezekhez tartozó alapegyenletek gyökei a II. eset *E)* képletei segélyével könnyen felírhatók. A singuláris pontok:

$$x=0\text{-nak megfelelőleg: } \eta=-\frac{2\varepsilon^2K}{1-\varepsilon^2}$$
$$x=1\text{-nek} \quad « \quad \eta=-\frac{4\varepsilon^2K}{1-\varepsilon^2}$$
$$x=\infty\text{-nek} \quad « \quad \eta=0$$

s az ezekhez tartozó alapegyenletek gyökei:

$$\eta=-\frac{2\varepsilon^2K}{1-\varepsilon^2}\text{ mellett: } 0 \text{ és } a_1$$
$$\eta=-\frac{4\varepsilon^2K}{1-\varepsilon^2} \quad « \quad 0 \text{ és } a_2$$
$$\eta=0 \quad « \quad \frac{3-a_1-a_2-a_3}{2},\ \frac{3-a_1-a_2+a_3}{2}$$

egész számok, ennélfogva differencziálegyenletünknek általánosan szólva legalább egyik integrálja másodfajú biperiodikus függvény.

II.

Mivel itt is épúgy, mint a II. esetben a differencziálegyenlet együtthatói nem változnak, ha η szaporodik $2K$ és $2K'i$-vel és ha szorzódik ε^2-al, ebből — mint ott láttuk — következik, hogy ha két másodfajú biperiodikus függvény létezik, akkor a μ_{11}, μ_{12}, μ_{21}, μ_{22} multiplikatorok a következő összefüggésben vannak egymással:

$$\mu_{11}\mu_{12}=1, \quad \mu_{11}=\mu_{21}$$
$$\mu_{12}^2=\mu_{21}, \quad \mu_{12}=\mu_{22},$$

mely egyenletek szerint csak harmadik egységgyökök lehetnek s ha az egyik ismeretes a többi három meghatározható. Ha tehát két másodfajú biperiodikus integrál van, akkor ezek a következő functionális egyenleteknek tartoznak eleget tenni:

$$\left.\begin{aligned} f_k(\eta+2K) &= \varepsilon^\lambda f_k(\eta) \\ f_k(\eta+2K'i) &= \frac{1}{\varepsilon^\lambda} f_k(\eta) \end{aligned}\right\} k=1,\ 2,$$

hol ε^λ egy harmadik egységgyököt jelent. Ha mindkét integrál másodfajú biperiodikus függvény, akkor két oly integrált kapunk, mely állandóval szorzódik akkor is, ha η helyére $\varepsilon^2\eta$ lép.

Bár itt az integrálnak $2K$ és $2K'i$ nem periodusai, mégis — tekintettel arra, hogy a két másodfajú biperiodikus integrál ugyanazoknak a functionális feltételeknek tartozik eleget tenni — általában ismét csak az egyik integrál lesz másodfajú biperiodikus függvény; ekkor ez az integrál, míg egyfelől eleget tesz a fenti functionális feltételeknek, másfelől állandó tényező járul hozzá, ha η egy harmadik egységgyökkel szorzódik. Az I. esetben kissé hosszadalmas bebizonyítást itt is mellőzzük.

Ha felteszszük, hogy a másodfajú biperiodikus integrál eleget tesz az

$$\begin{aligned} f(\eta+2K) &= \lambda\,.\,f(\eta) \\ f(\eta+2K'i) &= \mu\,.\,f(\eta) \\ f(\varepsilon^2\eta) &= \nu\,.\,f(\eta) \end{aligned}$$

functionális feltételeknek, akkor könnyen bebizonyíthatjuk, hogy λ és μ épúgy, mint midőn mindkét integrál másodfajú biperiodikus függvény, egymásnak recziprokjai lesznek.

Ennek igazolása végett tegyünk a harmadik egyenletben η helyébe $(\eta+2K)$-t, s majd $(\eta+2K'i)$-t, akkor a már többször alkalmazott eljárással kapjuk, hogy

$$\lambda=\frac{1}{\mu}, \quad \mu^3=1, \quad \lambda^3=1.$$

Tehát a *C)* differencziálegyenletnek egyik integrálja általában eleget tesz az

$$\left.\begin{aligned} f(\eta+2K) &= \varepsilon^{\lambda} f(\eta) \\ f(\eta+2K'i) &= \frac{1}{\varepsilon^{\lambda}} f(\eta) \\ f(\varepsilon^2\eta) &= \varepsilon^{\nu} f(\eta) \end{aligned}\right\} \quad F)$$

functionális egyenleteknek. A λ és ν felvehetik a 0, 1, 2 értékeket egymástól teljesen függetlenül. Egyes speciális esetekben mindkét integrál ily tulajdonságú.

III.

Ha a_1-et és a_2-t pozitivnak tételezzük fel, akkor a másodfajú integráloknak alakja:

$$y = e^{\lambda v} \prod_{k=1}^{m} \frac{\vartheta_1(v-a_k)}{\vartheta_1(v)},$$

hol $-m$ az $\eta = 0$ ponthoz tartozó determináló alapegyenletnek negativ gyöke.

Az integrál zéruspontjai általában egymástól különbözők és ha a zéruspont, akkor εa és $\varepsilon^2 a$-nak is zéruspontnak kell lennie. Többszörös zéruspontok csak a differencziálegyenlet singuláris pontjai, nevezetesen az $\eta = -\frac{2\varepsilon^2 K}{1-\varepsilon^2}$ és az $\eta = -\frac{4\varepsilon^2 K}{1-\varepsilon^2}$ pontok lehetnek, melyek egymástól függetlenül is előfordulhatnak.

Könnyen felirható az a függvény, a mely az *F)* alatti functionális tulajdonságoknak eleget tesz s az előbb említett pontok valamelyikében elsőrendűen válik zéróvá. Azt a függvényt, a mely az $\eta = -\frac{2\varepsilon^2 K}{1-\varepsilon^2}$ pontban válik elsőrendűen zérussá, mint η függvényét jelöljük $\Phi(\eta)$-val, mint v függvényét fogva fel $\varphi(v)$-vel, hasonlóképen az $\eta = -\frac{4\varepsilon^2 K}{1-\varepsilon^2}$ pontban eltűnő függvényt jelöljük $\Psi(\eta)$, illetőleg $\psi(v)$-vel. E két függvény:

$$\Phi(\eta)=\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{2}sn^3\eta+\frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{3(1-\varepsilon^2)}\,cn\,\eta\,dn\,\eta}{sn^3\eta}}$$

$$\Psi(\eta)=\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{2}sn^3\eta-\frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{3(1-\varepsilon^2)}\,cn\,\eta\,dn\,\eta}{sn^3\eta}}.$$

A II. eset $E)$ alatti képletei szerint e két függvény tényleg a kivánt tulajdonsággal bír. A $\Phi(\eta)$ függvény az

$$\eta=-\frac{2\varepsilon^2K}{1-\varepsilon^2}=\frac{2K-2K\varepsilon^2}{3}=\frac{2K+2K'i}{3},\ \text{vagyis a}\ v=\frac{1+\tau}{3};$$

a $\Psi(\eta)$ pedig az

$$\eta=-\frac{4\varepsilon^2K}{1-\varepsilon^2}=2\frac{2K+2K'i}{3},\ \text{vagyis a}\ v=2.\frac{1+\tau}{3}$$

pontban válik elsőrendűen zérussá, hol $\tau=\frac{K'i}{K}=-\varepsilon^2$.

Úgy a $\Phi(\eta)$, valamint a $\Psi(\eta)$ látszólag többértékű függvénye az η-nak. Minthogy azonban a harmadik gyökjel alatti függvény a $\Phi(\eta)$, illetőleg $\Psi(\eta)$ zéruspontjában harmadrendben válik zérussá, ebből következik, hogy maga a gyökkifejezés a zéruspont körül pozitiv egész hatványok szerint haladó sorba bontható, tehát η-nak egyértékű függvénye. Tényleg abból az ismeretből, hogy e két függvény másodfajú biperiodikus függvény, mely csak egy harmadik egységgyökkel szorzódik, ha η $2K$ és $2K'i$-vel szaporodik, a $\Phi(\eta)$ és $\Psi(\eta)$ ϑ függvényekkel raczionális alakban is előállítható.

A $\varphi(v)$ elsőrendű zéruspontja a $v=\frac{1+\tau}{3}=\frac{1-\varepsilon^2}{3}$, elsőrendű polusa pedig a $v=0$ pont, s mivel ezenkívül $\varphi(v)$ másodfajú biperiodikus függvény, ezért ily módon állítható elő:

$$\varphi(v)=C_1e^{\lambda_1\pi iv}\frac{\vartheta_1\left(v-\frac{1-\varepsilon^3}{3}\right)}{\vartheta_1(v)},$$

hol λ_1 és C_1 könnyen meghatározható állandók.

A λ_1 állandó meghatározható abból a tudásból, hogy $\varphi(v)$ egy harmadik egységgyökkel szorzódik, ha v 1-el vagy τ-val szaporodik. Ugyanis

$$\varphi(v+1) = e^{\lambda\pi i}\,\varphi(v)$$
$$\varphi(v+\tau) = e^{-\pi i(\lambda\varepsilon^2-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\varepsilon^2)}\,\varphi(v).$$

Csak akkor lesz mindkét multiplikátor harmadik egységgyök, ha $\lambda=-\frac{2}{3}$, és így

$$\varphi(v) = C_1\,.\,e^{-\frac{2}{3}\pi i v}\,\frac{\vartheta_1\left(v-\frac{1}{3}+\frac{\varepsilon^2}{3}\right)}{\vartheta_1(v)}\,.$$

Functionális tulajdonságai:

$$\varphi(v+1) = e^{-\frac{2}{3}\pi i}\,\varphi(v) = \varepsilon^2.\,\varphi(v)$$
$$\varphi(v+\tau) = e^{\frac{2\pi i}{3}}\,\varphi(v) = \varepsilon\,.\,\varphi(v)$$
$$\varphi(\varepsilon^2 v) \;= e^{\frac{2\pi i}{3}}\,\varphi(v) = \varepsilon\,.\,\varphi(v).$$

Ezen utolsó egyenlet levezetésénél tekintetbe veendő, hogy

$$\varepsilon^2 v - \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon^2}{3} = \varepsilon^2\left(v - \frac{1}{3} + \frac{\varepsilon^2}{3}\right) + \varepsilon^2.$$

A C_1 állandónak meghatározása czéljából tegyünk v helyébe $(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\varepsilon^2)$-ot, mivel ezen érték mellett

$$\varphi\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\varepsilon^2\right) = \Phi\left(-\frac{4\varepsilon^2 K}{1-\varepsilon^2}\right) = \sqrt[3]{1},$$

ha a gyököt úgy választjuk, hogy ez az érték $+1$ legyen, akkor kapjuk, hogy

$$C_1 = e^{\frac{\pi i(1-\varepsilon^3)}{9}},$$

minek meghatározásánál ismét tekintetbe veendő, hogy

$$\tfrac{2}{3}-\tfrac{2}{3}\varepsilon^2 = -\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}\varepsilon^2\right)+1-\varepsilon^2.$$

Hasonlóképen

$$\psi(v) = C_2 e^{\lambda_2\pi i}\,\frac{\vartheta_1(v-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\varepsilon^2)}{\vartheta_1(v)}.$$

Az állandók számára hasonló módon kapjuk ez értékeket:

$$\lambda = -\tfrac{4}{3},\quad C_1 = -e^{\frac{4\pi i(1-\varepsilon^2)}{9}}.$$

A $\psi(v)$ functionális tulajdonságai pedig:

$$\begin{aligned}
\psi(v+1) &= e^{-\frac{4}{3}\pi i}\,\psi(v) = \varepsilon\,.\,(v)\\
\psi(v+\tau) &= e^{\frac{4}{3}\pi i}\,\psi(v) = \varepsilon^2\psi(v)\\
\psi(\varepsilon^2 v) &= e^{-\frac{4}{3}\pi i}\,\psi(v) = \varepsilon\psi(v).
\end{aligned}$$

Mint az előbbeni esetekben, úgy itt is az $\eta = -\frac{2\varepsilon^2 K}{1-\varepsilon^2}$ csak 0, vagy α_1-ed, $\eta = -\frac{4\varepsilon^2 K}{1-\varepsilon^2}$ csak 0 vagy α_2-edrendű zéruspont, illetőleg, ha α_1 s α_2 negativ, ugyanily rendszámú polus lehet; az integrálnak alakja tehát:

$$y = \Phi(\eta)^\lambda\,.\,\Psi(\eta)^\mu R\left(\frac{1}{2}\,\frac{sn^3\eta+\varepsilon\sqrt{3\,(1-\varepsilon^2)}\,cn\,\eta\,dn\,\eta}{sn^2\eta}\right), \tag{G)}$$

hol

$$\lambda = 0 \quad \text{vagy} \quad \alpha_1,$$
$$\mu = 0 \quad \text{«} \quad \alpha_2.$$

Az $\eta = 0$ ponthoz tartozó determináló alapegyenletnek ellentétes jellel vett gyökei:

$$m = \frac{\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1-3}{2}, \quad n = \frac{-\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1-3}{2}.$$

Legyen továbbá:

$$\begin{aligned}
m_1 &= \frac{\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1-3}{2}, & n_1 &= \frac{-\alpha_3+\alpha_2-\alpha_1-3}{2},\\
m_2 &= \frac{\alpha_3-\alpha_2+\alpha_1-3}{2}, & n_2 &= \frac{-\alpha_3-\alpha_2+\alpha_1-3}{2},\\
m_3 &= \frac{\alpha_3-\alpha_2-\alpha_1-3}{2}, & n_3 &= \frac{-\alpha_3-\alpha_2-\alpha_1-3}{2}.
\end{aligned}$$

A *C)* differencziálegyenletnek a *G)* alakkal biró s az *F)* functionális egyenleteket kielégítő integrálja lesz, ha az

$$\left.\begin{aligned}
m &= -n_3-3 \equiv 0\\
m_1 &= -n_2-3 \equiv 0\\
m_2 &= -n_1-3 \equiv 0\\
m_3 &= -n\;-3 \equiv 0
\end{aligned}\right\}\text{(mod. 3)}$$

kongruencziák valamelyike teljesül.

*

Vegyük a fellépő eseteket egymás után.

1. $m \equiv n_3 \equiv 0$ (mod. 3), azaz

$$a_3 + a_2 + a_1 - 3 \equiv 0 \pmod{6}.$$

E kongruencziának megoldásai:

$$a_1 \equiv 0 \pmod{6} \qquad\qquad a_1 \equiv 3 \pmod{6}$$

$$\left.\begin{matrix} a_2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ a_3 \equiv 3, 2, 1, 0, 5, 4 \end{matrix}\right\} \pmod{6} \qquad \left.\begin{matrix} a_2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ a_3 \equiv 0, 5, 4, 3, 2, 1 \end{matrix}\right\} \pmod{6}$$

$$a_1 \equiv 1 \pmod{6} \qquad\qquad a_1 \equiv 4 \pmod{6}$$

$$\left.\begin{matrix} a_2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ a_3 \equiv 2, 1, 0, 5, 4, 3 \end{matrix}\right\} \pmod{6} \qquad \left.\begin{matrix} a_2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ a_3 \equiv 5, 4, 3, 2, 1, 0 \end{matrix}\right\} \pmod{6}$$

$$a_1 \equiv 2 \pmod{6} \qquad\qquad a_1 \equiv 5 \pmod{6}$$

$$\left.\begin{matrix} a_2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ a_3 \equiv 1, 0, 5, 4, 3, 2 \end{matrix}\right\} \pmod{6} \qquad \left.\begin{matrix} a_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ a_3 \equiv 4, 3, 2, 1, 0, 5 \end{matrix}\right\} \pmod{6}$$

a) Ha $m = -3\beta \geqq 0$, (β negativ egész szám vagy zérus), akkor az integrál:

$$y_1 = F\left(\beta, \alpha, \gamma, \frac{1}{2}\,\frac{sn^3\eta + \varepsilon\sqrt{3(1-\varepsilon^2)}\,cn\,\eta\,dn\,\eta}{sn^3\eta}\right)$$

egy $(-\beta)$-adfokú raczionális egész függvény, a mely az S csoport összes substitutióinak η-ra való alkalmazásánál változatlan marad.

b) Ha $n_3 = 3(\beta - 1) \geqq 0$, ($\beta$ pozitiv egész szám), akkor az integrál:

$$y_1 = f_1(\eta) = \Phi(\eta)^{a_1}\,\Psi(\eta)^{a_2}\,F(1-\beta, 1-\alpha, 2-\gamma, x).$$

Functionális tulajdonságai:

$$f_1(\varepsilon^{2k}\eta + \mu \,.\, 2K + \nu \,.\, 2K'i) = e^{\frac{2\pi i}{3}[a_1(k-\mu+\nu) + a_2(k+\mu-\nu)]} f_1(\eta).$$

2. $m_1 \equiv n_2 \equiv 0$ (mod. 3), azaz

$$a_3 + a_2 - a_1 - 3 \equiv 0 \pmod{6}.$$

E kongruencziának megoldásai:

$$a_1 \equiv 0 \pmod{6} \qquad\qquad a_1 \equiv 3 \pmod{6}$$

$$\left.\begin{matrix} a_2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ a_3 \equiv 3, 2, 1, 0, 5, 4 \end{matrix}\right\} \pmod{6} \qquad \left.\begin{matrix} a_2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ a_3 \equiv 0, 5, 4, 3, 2, 1 \end{matrix}\right\} \pmod{6}$$

$$\alpha_1 \equiv 1 \pmod{6} \qquad \alpha_1 \equiv 4 \pmod{6}$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha_2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5\\ \alpha_3 \equiv 4, 3, 2, 1, 0, 5\end{matrix}\right\}(\mathrm{mod.}\ 6) \qquad \left.\begin{matrix}\alpha_2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5\\ \alpha_3 \equiv 1, 0, 5, 4, 3, 2\end{matrix}\right\}(\mathrm{mod.}\ 6)$$

$$\alpha_1 \equiv 2 \pmod{6} \qquad \alpha_1 \equiv 5 \pmod{6}$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha_2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5\\ \alpha_3 \equiv 5, 4, 3, 2, 1, 0\end{matrix}\right\}(\mathrm{mod.}\ 6) \qquad \left.\begin{matrix}\alpha_2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5\\ \alpha_3 \equiv 2, 1, 0, 5, 4, 3\end{matrix}\right\}(\mathrm{mod.}\ 6)$$

a) Ha $m_1 = 3(\gamma-\beta-1) \geqq 0$, ($\gamma-\beta$ pozitiv egész szám), az integrál:

$$y_1 = f_1(\eta) = \Phi(\eta)^{\alpha_1} F(\beta-\gamma+1, \alpha-\gamma+1.\ 2-\gamma, x)$$

$$f_1(\varepsilon^{2k}\eta+\mu.2K+\nu.2K'i) = e^{\frac{2\pi i}{3}\alpha_1(k-\mu+\nu)} f_1(\eta).$$

b) Ha $n_2 = 3(\beta-\gamma) \geqq 0$, ($\beta-\gamma$ pozitiv egész szám vagy zérus), az integrál:

$$y_1 = f_1(\eta) = \Psi(\eta)^{\alpha_2} F(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, \gamma, x)$$

$$f_1(\varepsilon^{2k}\eta+\mu.2K+\nu.2K'i) = e^{\frac{2\pi i}{3}\alpha_2(k+\mu-\nu)} f_1(\eta).$$

3. $m_2 \equiv n_1 \equiv 0 \pmod{3}$, azaz

$$\alpha_3-\alpha_2+\alpha_1-3 \equiv 0 \pmod{6}.$$

E kongruenczia megoldásai:

$$\alpha_1 \equiv 0 \pmod{6} \qquad \alpha_1 \equiv 3 \pmod{6}$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha_2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5\\ \alpha_3 \equiv 3, 4, 5, 0, 1, 2\end{matrix}\right\}(\mathrm{mod.}\ 6) \qquad \left.\begin{matrix}\alpha_2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5\\ \alpha_3 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5\end{matrix}\right\}(\mathrm{mod.}\ 6)$$

$$\alpha_1 \equiv 1 \pmod{6} \qquad \alpha_1 \equiv 4 \pmod{6}$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha_2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5\\ \alpha_3 \equiv 2, 3, 4, 5, 0, 1\end{matrix}\right\}(\mathrm{mod.}\ 6) \qquad \left.\begin{matrix}\alpha_2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5\\ \alpha_3 \equiv 5, 0, 1, 2, 3, 4\end{matrix}\right\}(\mathrm{mod.}\ 6)$$

$$\alpha_1 \equiv 2 \pmod{6} \qquad \alpha_1 \equiv 5 \pmod{6}$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha_2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5\\ \alpha_3 \equiv 1, 2, 3, 4, 5, 0\end{matrix}\right\}(\mathrm{mod.}\ 6) \qquad \left.\begin{matrix}\alpha_2 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5\\ \alpha_3 \equiv 4, 5, 0, 1, 2, 3\end{matrix}\right\}(\mathrm{mod.}\ 6)$$

a) Ha $m_2 = 3(\alpha-\gamma) \geqq 0$, ($\alpha-\gamma$ pozitiv egész szám vagy zérus), akkor az integrál:

$$y_1 = f_1(\eta) = \Psi(\eta)^{\alpha_2} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)$$

egy $(\alpha-\gamma)$-adfokú raczionális egész függvény, functionális tulajdonságai a 2. *b)* alatt.

b) Ha $n_1=3(\gamma-\alpha-1)$, $(\gamma-\alpha$ pozitiv egész szám), az integrál:

$$y_1=\Phi(\eta)^{\alpha_1}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ x).$$

Functionális tulajdonságai a 2. *a)* alatt.

4. $m_3\equiv n\equiv 0$ (mod. 3), azaz

$$\alpha_3-\alpha_2-\alpha_1-3\equiv 0 \ (\text{mod. } 6).$$

E kongruenczia megoldásai:

$$\alpha_1\equiv 0 \ (\text{mod. } 6) \qquad\qquad \alpha_1\equiv 3 \ (\text{mod. } 3)$$
$$\left.\begin{array}{l}\alpha_2\equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\\ \alpha_3\equiv 3,\ 4,\ 5,\ 0,\ 1,\ 2\end{array}\right\}(\text{mod. } 6) \qquad \left.\begin{array}{l}\alpha_2\equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\\ \alpha_3\equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\end{array}\right\}(\text{mod. } 6)$$

$$\alpha_1\equiv 1 \ (\text{mod. } 6) \qquad\qquad \alpha_1\equiv 4 \ (\text{mod. } 3)$$
$$\left.\begin{array}{l}\alpha_2\equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\\ \alpha_2\equiv 4,\ 5,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\end{array}\right\}(\text{mod. } 6) \qquad \left.\begin{array}{l}\alpha_2\equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\\ \alpha_3\equiv 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 0\end{array}\right\}(\text{mod. } 6)$$

$$\alpha_1\equiv 2 \ (\text{mod. } 6) \qquad\qquad \alpha_1\equiv 5 \ (\text{mod. } 3)$$
$$\left.\begin{array}{l}\alpha_2\equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\\ \alpha_3\equiv 5,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\end{array}\right\}(\text{mod. } 6) \qquad \left.\begin{array}{l}\alpha_2\equiv 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\\ \alpha_3\equiv 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 0,\ 1\end{array}\right\}(\text{mod. } 6)$$

a) Ha $m_3=3(\alpha-1)\geqq 0$, (α pozitiv egész szám), az integrál:

$$y_1=f_1(\eta)=\Phi(\eta)^{\alpha_1}\Psi(\eta)^{\alpha_2}F(1-\alpha,\ 1-\beta,\ 2-\gamma,\ x).$$

Functionális tulajdonságai az 1. *b)* alatt.

b) Ha $n=-3\alpha\geqq 0$, (α negativ egész szám vagy zérus), akkor az integrál:

$$y_1=f_1(\eta)=F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)$$

az x-nek egy $(-\alpha)$-adfokú raczionális egész függvénye.

Ezzel az *F)* functionális tulajdonságokkal biró integrálokat meghatároztuk. Most még meg kell vizsgálnunk, hogy vajjon ily integrál mindig létezik-e?

Ha közelebbről megnézzük a kongruencziáknak eleget tevő értékeket, arra az eredményre jutunk, hogy α_1, α_2, α_3 amaz értékei mellett, midőn közülök egyik sem osztható hárommal, azaz midőn az *A)* differencziálegyenlethez tartozó determináló alapegyenletek gyökeinek különbségei irreducibilis törtek, mindig egy és csakis egy oly integrál létezik, mely az S csoport substitutióinak η-ra való alkalmazásánál csak egy-egy állandóval szorzódik.

A következő a értékek:

$$a_1 \equiv 0 \pmod{6}$$
$$\left.\begin{array}{l} a_2 \equiv 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5 \\ a_3 \equiv 3,\ 2,\ 4,\ 1,\ 5,\ 0,\ 1,\ 5,\ 2,\ 4 \end{array}\right\} \pmod{6}$$

$$a_1 \equiv 3 \pmod{6}$$
$$\left.\begin{array}{l} a_2 \equiv 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 4,\ 5,\ 5 \\ a_3 \equiv 0,\ 1,\ 5,\ 2,\ 4,\ 3,\ 2,\ 4,\ 1,\ 5 \end{array}\right\} \pmod{6}$$

$$a_1 \equiv \pm 1 \pmod{6}$$
$$\left.\begin{array}{l} a_2 \equiv 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 5 \\ a_3 \equiv 2,\ 4,\ 3,\ 0,\ 1,\ 5,\ 0,\ 3 \end{array}\right\} \pmod{6}$$

$$a_1 \equiv \pm 2 \pmod{6}$$
$$\left.\begin{array}{l} a_2 \equiv 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 5 \\ a_3 \equiv 1,\ 5,\ 0,\ 3,\ 2,\ 4,\ 3,\ 0 \end{array}\right\} \pmod{6}$$

(hol az a_2 és a_3-nál mindig az egymás alatt álló számok tartoznak együvé) legalább is két-két kongruencziát elégitenek ki, ennélfogva ezekben az esetekben mindkét integrálnak meg vannak az *F)* alatti tulajdonságai, feltéve, hogy egyik integrál sem tartalmaz logarithmust. Ha azonban ezen esetekben logarithmus lép fel, akkor csak az egyik integrál tesz eleget az *F)* alatti egyenleteknek, a másik integrál pedig harmadfajú integrálokat is tartalmaz.

Az itt felirt esetekre teljesen jellemző, hogy ekkor a determináló alapegyenletek gyökeinek különbségei közül egy vagy mindhárom egész szám. Míg azonban az előbbeni esetekben az ezen feltételt kielégítő a_1, a_2, a_3 számok között előfordultak olyanok, melyek egyik kongruencziát sem elégitettek ki, addig itt ezen feltétel teljesen elegendő; azon a_1, a_2, a_3 értékek, melyek az

$$a_1 + a_2 + a_3 \equiv 1 \pmod{2}$$

feltételt kielégítik s közülök egy vagy mindhárom osztható 3-mal, mindenesetre két-két kongruencziát elégítenek ki s így legalább az egyik integrál okvetlenül eleget tesz az *F)* functionális egyenleteknek.

Végül azon esetekben, midőn a determináló alapegyenletek gyökeinek különbségei közül kettő egész szám, egyik integrálnak sincsenek meg az *F)* alatti functionális tulajdonságai, egyik sem lehet másodfajú biperiodikus függvény sem, mivel az egyik logarithmust tartalmaz.

Mivel jelen esetben a determináló alapegyenletek gyökeinek különbségei reducibilis törtek nem lehetnek a nélkül, hogy egész számok ne legyenek, ezért itt az I. és II. esettől eltérőleg, ha a differencziálegyenletnek egyik integrálja sem bír logarithmusi singularitással, akkor minden esetben legalább az egyik integrál az S csoport substitutióinak η-ra való alkalmazásánál csak egy-egy állandóval szorzódik.

IV.

A második integrált vizsgálva csak azokkal az esetekkel kell foglalkoznunk, midőn az a_1, a_2, a_3 mennyiségek egyike sem osztható 3-mal, mert az ellenkező esetben — a_1, a_2, a_3 egyes speciális értékeitől eltekintve — vagy mindkét integrált, vagy egyiket sem ismerjük, az utóbbi esetekben pedig a második integrál vizsgálatáról természetesen szó sem lehet.

Kimutatjuk, hogy a jelzett esetekben az integrálhányados itt is elliptikus integrál, és így a második integrál meghatározása teljesen az, mint az I. és II. esetekben.

Az integrálhányadoshoz a *C)* differencziálegyenletből az

$$y = y_1 . u$$

helyettesítéssel u' számára nyert elsőrendű differencziálegyenlet integrálása útján jutunk el. Mivel most

$$-\int p d\eta = \log \Phi(\eta)^{a_1 - 1} . \Psi(\eta)^{a_2 - 1},$$

az integrálhányados az állandóknak az előbbeni esetekhez hasonló választása mellett:

$$u=\frac{y_2}{y_1}=\int\frac{1}{y_1^2}\,\Phi(\eta)^{\alpha_1-1}\,\Psi(\eta)^{\alpha_2-1}\,d\eta.$$

Annak kimutatása czéljából, hogy az integrálandó függvény egy $2K$ és $2K'i$ periodusokkal biró elliptikus függvény, vegyük a négy esetet egymásután

1. Ha

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\equiv 3 \pmod{6}$$

ekkor, mivel feltételünk szerint α_3 nem osztható 3-mal, $\alpha_1+\alpha_2$ sem osztható, és így — α_1 és α_2 is ily tulajdonságú lévén —

$$\alpha_1\equiv\alpha_2 \pmod{3}$$

köteles lenni.

A $\Phi(\eta)^3$ és $\Psi(\eta)^3$, valamint a

$$\Phi(\eta)\,.\,\Psi(\eta)=\frac{1}{4}\,\frac{1-\varepsilon^2 cn^2\eta}{sn^2\eta}$$

elsőfajú biperiodikus függvény, ennélfogva az 1. *a)* és *b)* megoldásokra való tekintettel látjuk, hogy az integrálandó függvény tényleg elliptikus függvény.

2. Ha

$$\alpha_3+\alpha_2-\alpha_1\equiv 3 \pmod{6},$$

ekkor $\alpha_2-\alpha_1$ egy hárommal nem osztható szám, minek folytán kell, hogy α_1 és α_2 mod. 3 inkongruensek legyenek és így csak az

$$\alpha_1\equiv 1 \pmod{3},\qquad \alpha_2\equiv 2 \pmod{3},$$

és az

$$\alpha_1\equiv 2 \pmod{3},\qquad \alpha_2\equiv 1 \pmod{3}$$

esetek lehetségesek.

A 2. *a)* megoldás szerint az integrálhányadost előállító integrál alatti függvényben a nevezőben négyzeten előforduló Gauss-féle sor melletti faktor

$$\frac{1}{\Phi(\eta)^{2\alpha_1}}\cdot\Phi(\eta)^{\alpha_1-1}\,\Psi(\eta)^{\alpha_1-1}=\Phi(\eta)^{-\alpha_1-1}\,\Psi(\eta)^{\alpha_2-1}.$$

Ez, mint könnyen belátható, úgy az $a_1 \equiv 1$, $a_2 \equiv 2$ (mod. 3), valamint az $a_1 \equiv 2$, $a_2 \equiv 1$ (mod. 3) esetben, mint $\Phi(\eta)^3$, $\Psi(\eta)^3$ és $\Phi(\eta) \cdot \Psi(\eta)$ bizonyos hatványainak szorzata állítható elő, tehát elliptikus függvény. Hasonlóképen áll a dolog a 2. *b)* esetben is. A 3. és 4. esetben a vizsgálat egészen mellőzhető, mert az integrálók 1. és 2. esetben fellépőkhöz teljesen hasonló tulajdonsággal bírnak.

Az integrálhányados tehát tényleg elliptikus integrál, mely másodfajú integrálokból és az η-ból lineárisan rakható össze.

Az y_2 változása az S csoport substitutioinak η-ra való alkalmazásánál igen könnyen meghatározható.

*

Példa gyanánt vegyük azt az esetet, midőn

$$a_1 = -2, \quad a_2 = -2, \quad a_3 = 1.$$

Az *F)* egyenleteket kielégítő integrál az 1. *b)* szerint

$$y_1 = \Phi(\eta)^{-2} \Psi(\eta)^{-2},$$

ennélfogva a két integrálnak hányadosa:

$$\frac{y_2}{y_1} = 4 \int_0^\eta \Phi(\eta)\, \Psi(\eta)\, d\eta = \int_0^\eta \frac{1-\varepsilon^2 cn^2\eta}{sn^2\eta}\, d\eta.$$

Az első alakban az integrálhoz irható állandó faktort czélszerűségből 4-nek választottuk.

Az integrálandó függvénynek egyetlen másodrendű polusa az $\eta = 0$ pont, ennélfogva:

$$\frac{1-\varepsilon^2 cn^2\eta}{sn^2\eta} = C + C' \frac{d}{d\eta} \left[\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)} \right].$$

A C és C' állandókat az $\eta = 0$ pont körül való sorbafejtés segélyével határozhatjuk meg s találjuk, hogy

$$C' = -\frac{1-\varepsilon^2}{2K}, \quad C = \frac{1}{3} \frac{1-\varepsilon^2}{4K^2} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}.$$

A $\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}$ hányadost a II. esetben felirt transformatiós képletek segítségével határozhatjuk meg. Minthogy azonban az ott előforduló c állandónak csak négyzetét tudjuk meghatározni, tegyünk a transformatiós képletek közül az elsőben háromszor egymásután v helyébe $\varepsilon^2 v$-t, ekkor kapjuk a következő egyenletet:

$$\vartheta_1(\varepsilon^2 v) = -c^4 e^{\pi i \varepsilon^2 v^2} \vartheta_1(v)$$

s ha a harmadik transformatiós képletben $v = 0$ irjuk, kapjuk, hogy

$$c = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}, \quad c^4 = \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} = k^2 = -\varepsilon^2,$$

tehát

$$\vartheta_1(\varepsilon^2 v) = \varepsilon^2 . e^{\pi i \varepsilon^2 v^2} \vartheta_1(v).$$

Deriváljuk ezen egyenletet háromszor v szerint s azután az így nyert egyenletben tegyünk $v=0$, akkor kapjuk, hogy

$$\vartheta_1''' = 6\pi i \varepsilon \vartheta_1' + \varepsilon^2 \vartheta_1''',$$

honnan

$$\frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'} = \frac{6\pi i \varepsilon}{1-\varepsilon^2},$$

tehát

$$C = \frac{\pi i \varepsilon}{2K^2}.$$

A két integrálnak hányadosa:

$$\frac{y_2}{y_1} = f(\eta) = \frac{\pi i \varepsilon}{2K^2}\eta - \frac{1-\varepsilon^2}{2K}\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}.$$

Functionális tulajdonságai:

$$f(\eta + 2K) = f(\eta) + \frac{\pi i \varepsilon}{K}$$

$$f(\eta + 2K'i) = f(\eta) - \frac{\pi i \varepsilon^2}{K}$$

$$f(\varepsilon^2 \eta) = \varepsilon f(\eta),$$

ennélfogva az elliptikus integrál periodiczitási modulusai:

$$\Omega = \frac{\pi i \varepsilon}{K}, \quad \Omega' = -\frac{\pi i \varepsilon^2}{K},$$

s a LEGENDRE-féle reláczió most ily alakban jelenik meg

$$K\Omega'-\Omega K' = (1-\varepsilon^2)\pi i.$$

Végül ama változás, a melyet az y_1, y_2 integrálok az S csoport substitutióinak η-ra való alkalmazásánál szenvednek, a következő egyenletekkel van adva:

$$f_1(\varepsilon^{2k}\eta+\mu\,.\,2K+\nu\,.\,2K'i) = \varepsilon^{2k}f_1(\eta)$$
$$f_2(\varepsilon^{2k}\eta+\mu\,.\,2K+\nu\,.\,2K'i) = \varepsilon^{2k}(\mu\,.\,\Omega+\nu\,.\,\Omega')f_1(\eta)+f_2(\eta).$$

Megjegyzendő, hogy úgy ezen, valamint az előbbeni esetekben is a felvett példa egyike volt a legegyszerűebbeknek. Elvi nehézség az a_1, a_2, a_3 nagyobb értékeihez tartozó példáknál sem fordul elő, azonban az integrálhányadost előállító elliptikus integrál polusainak meghatározása épúgy, mint az általános PICARD-féle differencziálegyenlet esetében az integrálok zéruspontjainak meghatározása egy magasabbfokú algebrai egyenletnek megoldását teszi szükségessé.*

* L. KRAUSE: az. i. h.

Habán Mihály.

A KOMPLEX SZÁMOK ÁBRÁZOLÁSÁNAK EGY ELEMI GEOMETRIAI ALKALMAZÁSÁRÓL.*

1. Ha a sík pontjait a szokásos módon a komplex számok képeinek tekintjük, akkor két egyenes vonaldarab párhuzamosságának föltétele igen egyszerű alakban fejezhető ki. Szándékom e kriteriumot levezetni és segítségével a következő ismeretes tételt bebizonyítani:

Legyenek két teljes négyszög oldalai kölcsönösen egyértelműen egymásra úgy vonatkoztatva, hogy bármelyik négyszög bármelyik szögpontjában találkozó három oldalnak a másik négyszögben mindig oly három oldal felel meg, melyek nem találkoznak egy szögpontban, hanem három szögpontot párjával összekötnek. Ha e vonatkozás mellett az egyik négyszögnek öt oldala rendre párhuzamos a másik négyszög megfelelő oldalával, akkor a hatodik oldal is párhuzamos a neki megfelelővel

2. Ha U_1, U_2, V_1 és V_2 rendre az

$$u_1=x_1+iy_1 \quad u_2=x_2+iy_2 \quad v_1=x_1'+iy_1' \quad v_2=x_2'+iy_2'$$

komplex számok képei, akkor

$$u_2-u_1=x_2-x_1+i(y_2-y_1)=r(\cos\varphi+\sin\varphi)$$

és

$$v_2-v_1=r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi'),$$

hol r és r' az U_1U_2 és V_1V_2 vonaldarabok hosszát jelentik, φ és φ' pedig azokat a szögeket, melyeket e vonaldarabok a valós számok tengelyével bezárnak. Innen

$$\frac{u_2-u_1}{v_2-v_1}=\frac{r}{r'}\left(\cos(\varphi-\varphi')+i\sin(\varphi-\varphi')\right).$$

---

* Előadatott a Math. és Physikai Társulat 1904 márczius 3-án tartott ülésén.

Ez a hányados akkor és csak akkor valós értékű, ha

$$\sin(\varphi-\varphi')=0.$$

Másrészt e sinus akkor és csak akkor tünik el, ha az U_1U_2 és V_1V_2 vonaldarabok párhuzamosak. Tehát:

Az U_1U_2 és V_1V_2 vonaldarabok akkor és csak akkor párhuzamosak, ha a megfelelő

$$u_2-u_1 \qquad v_2-v_1$$

különbségekből alkotott hányados valós értékű.

3. Áttérve a teljes négyszögekről bebizonyitandó tételre, legyenek az egyik négyszögnek szögpontjai

$$A_1A_2A_3A_4,$$

a másikéi

$$B_1B_2B_3B_4.$$

Az első négyszög szögpontjait egészen tetszésszerinti sorrendben jelöljük meg a felsorolt indexekkel. A második négyszögben a jelölést a következő módon választjuk. Az első négyszög A_4 szöppontjában találkozó

$$A_1A_4 \quad A_2A_3 \quad A_3A_4$$

oldalaknak megfelelő oldalakat így jelöljük

$$B_2B_3 \quad B_3B_1 \quad B_1B_2.$$

Ezzel nemcsak az van megállapítva, hogy a B_1, B_2 és B_3-mal rendre mely szögpontok jelölendők, hanem az is, hogy B_4 az a negyedik szögpont, mely e három oldal egyikén sincs rajta.

Egyszersmind világos, hogy A_2A_3-nak B_1B_4 felel meg. Ugyanis az A_1-ben találkozó

$$A_1A_2 \quad A_1A_3 \quad A_1A_4$$

oldalaknak a másik négyszögben oly oldalak felelnek meg, melyek három szögpontot összekötnek. E három szögpont közül kettő az A_1A_4 oldalnak megfelelő B_2B_3 oldalon van, a harmadik pedig nem lehet B_1, hanem ez okvetlenül B_4. Tehát az A_1A_2 és A_1A_3 oldalaknak a $B_2B_3B_4$ háromszögnek B_2B_3-tól különböző oldalai felelnek meg. Ennélfogva csakugyan A_2A_3-nak csak B_1B_4 felelhet meg. Hasonló meggondolások azt mutatják, hogy A_3A_1-nek a B_2B_4 és A_1A_2-nek a B_3B_4 felel meg. Vagyis az

$$A_1A_4 \quad A_2A_4 \quad A_3A_4 \quad A_2A_3 \quad A_3A_1 \quad A_1A_2$$

oldalaknak rendre

$$B_2B_3 \quad B_3B_1 \quad B_1B_2 \quad B_1B_4 \quad B_2B_4 \quad B_3B_4$$

felelnek meg.

A jelölést mindig úgy választhatjuk, hogy A_1A_2 és B_3B_4 legyen az a két megfelelkező oldal, melyekre a többiekből következtetni akarunk. A bebizonyítandó tétel tehát így is fogalmazható.

Ha a két teljes négyszögben — $A_1A_2A_3A_4$ és $B_1B_2B_3B_4$-ben — rendre

$$A_1A_4 \parallel B_2B_3 \quad A_2A_4 \parallel B_3B_1 \quad A_3A_4 \parallel B_1B_2$$

és

$$A_2A_3 \parallel B_1B_4 \quad A_3A_1 \parallel B_2B_4,$$

akkor egyszersmind

$$A_1A_2 \parallel B_3B_4.$$

Ha itt A_1, A_2, A_3, A_4 és B_1, B_2, B_3, B_4 rendre az a_1, a_2, a_3, a_4 és b_1, b, b_3, b_4 komplex számok képei, akkor a bebizonyítandó tétel így is fogalmazható:

Ha az

$$\begin{aligned} &\frac{a_1-a_4}{b_2-b_3}=\lambda_1 \quad &&\frac{a_2-a_4}{b_3-b_1}=\lambda_2 \quad &&\frac{a_3-a_4}{b_1-b_2}=\lambda_3 \\ &\frac{a_2-a_3}{b_1-b_4}=\mu_1 \quad &&\frac{a_3-a_1}{b_2-b_4}=\mu_2 \quad &&\frac{a_1-a_2}{b_3-b_4}=\mu_3 \end{aligned} \tag{I}$$

hányadosok közül az első öt valós értékű, akkor az utolsó is olyan.

E hányadosok természetesen mindannyian végesek és a zérustól különbözők. Ellenkező esetben vagy a B_1, B_2, B_3 és B_4 pontok, vagy az A_1, A_2, A_3 és A_4 pontok nem volnának mindannyian egymástól különbözők.

4. Az (I.) alatti egyenletekből

$$\begin{aligned} a_2-a_3&=\mu_1(b_1-b_4) \\ a_4-a_2&=-\lambda_2(b_3-b_1)=\lambda_2(b_1-b_4)-\lambda_2(b_3-b_4) \\ a_3-a_4&=\lambda_3(b_1-b_2)=\lambda_3(b_1-b_4)-\lambda_3(b_2-b_4). \end{aligned}$$

Ha még összeadunk:

$$(\mu_1+\lambda_2+\lambda_3)(b_1-b_4)-\lambda_3(b_2-b_4)-\lambda_2(b_3-b_4)=0.$$

Innen az 1., 2. és 3. ciklikus fölcserélése után

$$-\lambda_3(b_1-b_4)+(\mu_2+\lambda_1+\lambda_3)(b_2-b_4)-\lambda_1(b_3-b_4)=0$$

és

$$-\lambda_2(b_1-b_4)-\lambda_1(b_2-b_4)+(\mu_3+\lambda_1+\lambda_2)(b_3-b_4)=0.$$

Minthogy b_1-b_4, b_2-b_4 és b_3-b_4 a zérustól különbözők, azért e három egyenlet csak úgy állhat fenn egyidejüleg, ha

$$D=\begin{vmatrix} \mu_1+\lambda_2+\lambda_3 & -\lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_3 & \mu_2+\lambda_1+\lambda_3 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & -\lambda_1 & \mu_3+\lambda_1+\lambda_2 \end{vmatrix}=0.$$

Ez *általában* egy μ_3-ra nézve elsőfokú egyenlet, melyből — ha λ_1, λ_2, λ_3, μ_1 és μ_2 valós értékűek — a μ_3-ra is valós értéket nyerünk.

Kivételesen azonban μ_3 együtthatója eltünhetik. Ez az eset még külön tárgyalandó.

6. A D determinánsban μ_3 együtthatója azonos az utolsó sor utolsó eleméhez tartozó

$$D_{33}=\begin{vmatrix} \mu_1+\lambda_2+\lambda_3 & -\lambda_3 \\ -\lambda_3 & \mu_2+\lambda_1+\lambda_3 \end{vmatrix}$$

determinánssal.

Egy ismeretes determinánstétel értelmében a D szimmetrikus determináns és ennek D_{33} főminora csak úgy tünhetnek el egyszerre, ha az utolsó sor első és második eleméhez tartozó D_{13}, D_{23} aldeterminánsok is eltünnek. Esetünkben tehát

$$\begin{vmatrix} -\lambda_3 & -\lambda_2 \\ \mu_2+\lambda_1+\lambda_3 & -\lambda_1 \end{vmatrix}=0 \quad \text{és} \quad \begin{vmatrix} -\lambda_2 & \mu_1+\lambda_2+\lambda_3 \\ -\lambda_1 & -\lambda_3 \end{vmatrix}=0$$

vagyis

$$\lambda_2\mu_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_2=0$$
$$\lambda_1\mu_1+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_2=0$$

és innen

$$\lambda_1\mu_1=\lambda_2\mu_2.$$

Ennek az egyenletnek figyelemre méltó jelentése van. Ugyanis a λ-k és μ-k értékeinek behelyettesítése után

$$\frac{(a_1-a_4)(a_2-a_3)}{(b_2-b_3)(b_1-b_4)}=\frac{(a_2-a_4)(a_3-a_1)}{(b_3-b_1)(b_2-b_4)},$$

tehát az a-k és b-k szétválasztása után a *szóban forgó egyenlet tartalmát így is fejezhetjük ki*

$$(a_1a_2a_3a_4)=(b_1b_2b_3b_4).$$

Itt $(a_1a_2a_3a_4)$ a zárjelbe foglalt számok kettős viszonyát jelenti, azaz

$$(a_1a_2a_3a_4)=\frac{(a_1-a_3)(a_4-a_2)}{(a_3-a_2)(a_1-a_4)}.$$

Most már az 1., 2. és 3. cziklikus fölcserélése után egyszersmind

$$(a_2a_3a_1a_4)=(b_2b_3b_1b_4)$$
$$(a_3a_1a_2a_4)=(b_3b_1b_2b_4),$$

mert a milyen változást okoz a fölcserélés a bal oldalon álló kettős viszonyban, ugyanazt okozza a jobb oldalon is. Ámde az utolsó két egyenlet így is fejezhető ki

$$\lambda_2\mu_2=\lambda_3\mu_3$$
$$\lambda_3\mu_3=\lambda_1\mu_1.$$

Esetünkben e szerint

$$\lambda_1\mu_1=\lambda_2\mu_2=\lambda_3\mu_3.$$

Innen μ_3-ra ismét valós értéket kapunk, ha λ_1, μ_1, λ_2, μ_2 és λ_3 valósak voltak.

Kürschák József.

ADALÉKOK AZ IRREDUCZIBILIS EGYENLETEK ELMÉLETÉHEZ.

(Első közlemény.)

1. KÖNIGSBERGER[1] a következő czímű értekezésben: «Über den EISENSTEIN'schen Satz etc.» az EISENSTEIN-féle[2] tétel általánosításaival foglalkozott. Ezek az általánosítások egyfelől oly egyenletekre vonatkoznak, melyeknek együtthatói egy változót tartalmaznak, másrészről azonban számbeli együtthatókkal biró egyenletekre is. HILBERT[3] a «Fortschritte der Mathematik» czímű folyóiratban figyelmeztetett arra, hogy a számbeli együtthatókkal biró egyenletekre vonatkozó tételek könnyen levezethetők az algebrai számok ideálelméletéből.

E czikkben meg fogom mutatni, hogy a KÖNIGSBERGER-féle[4] tételek *egy csapásra* levezethetők az általános algebrai mennyiségek ideálelméletéből, a hol már most teljesen közömbös, vajjon az együtthatók számok-e, vagy tetszőleges sok «határozatlant» tartalmaznak.

2. Legyen

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n = 0 \tag{1}$$

oly egyenletet, melynek együtthatói az $[(A), x_1, x_2, \ldots, x_m]$ holoid, illetőleg az $\big[[1], x_1, x_2, \ldots, x_m\big]$ holoid tartományból származnak.[5] Legyen továbbá

---

[1] Crelle Journal. Bd. 115. pp. 53—78. Berliner Sitzungsberichte 1894.

[2] A rendesen így nevezett tételt először SCHÖNEMANN bizonyította be. (Crelle 32.)

[3] Jahrgang 1894. p. 147.

[4] A jelen tárgyalásnál *egy általánosabb* tételt kapunk, mely KÖNIGSBERGER tételeit magában foglalja.

[5] Lásd KŐNIG: Az algebrai mennyiségek általános elméletének alapvonalai.

$$n = \prod_{s=1}^{r} n_s$$

a hol az n_s számok egymáshoz relativ primszámok. (Az $r=1$ esetet szintén megengedjük.) A

$$P_1, P_2, \ldots, P_r$$

mennyiségek jelentsenek egymástól különböző és az eredeti holoid tartományból származó törzsmennyiségeket. Végre $E\left(\frac{a}{b}\right)$ jelölje az $\frac{a}{b}$ számban foglalt legnagyobb raczionális egész számot és legyenek az

$$a_1, a_2, \ldots, a_r$$

számok pozitiv raczionális egész számok. Akkor a következő tétel érvényes. *Ha a c_i együtthatók a*

$$c_i = \prod_{s=1}^{r} P_s^{E\left(\frac{i\alpha_s - 1}{n_s}\right)+1} C_i \tag{1*}$$

alakban állíthatók elő, a hol a C_i mennyiségek az eredeti holoid tartományból származnak, ha továbbá az aequivalentia értelmében*

$$(C_n, \prod_{s=1}^{r} P_s) = 1, \quad (\alpha_s, n_s) = 1, \tag{1**}$$

akkor az (1) *egyenlet irreduczibilis.*

3. Oszszuk az (1) egyenletet $P_s^{\frac{\alpha_s n}{n_s}}$ - vel, akkor a következőt kapjuk:

---

* A továbbiakra fontos megjegyzés, hogy:

$$E\left(\frac{i\alpha_s - 1}{n_s}\right) = \begin{cases} E\left(\frac{i\alpha_s}{n_s}\right), & \text{ha } i\alpha_s \text{ nem osztható } n_s\text{-sel,} \\ E\left(\frac{i\alpha_s}{n_s}\right) - 1, & \text{ha } i\alpha_s \text{ osztható } n_s\text{-sel.} \end{cases}$$

$$\left(\frac{z}{P_s^{\frac{\alpha_s}{n_s}}}\right)^n + c_1\left(\frac{1}{P_s}\right)^{\frac{\alpha_s}{n_s}}\left(\frac{z}{P_s^{\frac{\alpha_s}{n_s}}}\right)^{n-1} + \cdots +$$

$$+ c_i\left(\frac{1}{P_s}\right)^{\frac{i\alpha_s}{n_s}}\left(\frac{z}{P_s^{\frac{\alpha_s}{n_s}}}\right)^{n-i} + \cdots + \prod_{j=1}^{s-1} P_j^{\frac{n\alpha_j}{n_j}} \prod_{h=s+1}^{r} P_h^{\frac{n\alpha_h}{n_h}} C_n = 0. \qquad (2)$$

Legyen most w az (1) egyenlet gyöke, mely a (Γ) genustartományt határozza meg. Minthogy a (2) egyenlet együtthatói (1*) szerint a holoid tartománynak algebrai egész mennyiségei és minthogy az utolsó együttható (1**) szerint P_s-hez relativ prim, azért

$$w^{n_s} \text{ osztható } P_s^{\alpha_s} \qquad (3)$$

és az æquivalentia értelmében

$$\left(\frac{w^{n_s}}{P_s^{\alpha_s}}, P_s\right) = 1. \qquad (3^{\star})$$

4. Most már áttérhetünk a bebizonyításra. Legyen P_s primideáltényezőkre bontva:

$$P_s = \mathfrak{p}_1^{e_1}\mathfrak{p}_2^{e_2}\ldots{}_k^{e_k}$$

és legyen

$$w = \mathfrak{p}_1^{a_1}\mathfrak{p}_2^{a_2}\ldots\mathfrak{p}_k^{a_k}\mathfrak{Q},\ (\mathfrak{Q}, P_s) = 1,$$

akkor (3) és (3*)-ból az ideálelmélet alaptétele szerint

$$n_s a_g = \alpha_s e_g$$
$$(g=1, 2, \ldots, k)$$

Azonban

$$(\alpha_s, n_s) = 1$$

és így

$$e_g \equiv 0 \ (\text{mod. } n_s) \qquad (4)$$
$$(g=1, 2, \ldots, k)$$

Ennek folytán a (Γ) genustartományra képezett Nm.(P_s) a P_s mennyiségnek oly hatványával æquivalens, melynek kitevője n_s

többszöröse. Tehát a genustartomány fokszáma n_s-nek és így a feltételek szerint n-nek is többszöröse, vagyis egyenlő n-nel, a mivel a tétel be van bizonyítva.

Magától értetődik, hogy az (1) egyenlet irreduczibilitása megmarad, ha z^n együtthatójáról csak azt teszszük fel, hogy relativ prim $\prod_{s=1}^{r} P_s$-hez.

5. Ha az $r=1$ speczialis esetben a P ill. α jelölést használjuk, akkor látni való, hogy P a genustartományban egy primideál n-dik hatványa.

Ebben az esetben (1) *még*

$$(\text{æqu. mod. } P^{\alpha+1})\ \star$$

is irreduczibilis. Ha ugyanis ez nem volna így, akkor kapnánk egy

$$Ef(z) - P^{\alpha+1} R(z) = 0 \tag{5}$$

alakú reduczibilis egyenletet, a melyben E az eredeti holoid tartománynak P-hez relativ prim mennyisége és $R(z)$ foka z-ben $f(z)$ fokánál alacsonyabb volna. Az ilyen egyenlet azonban az előbbi tétel szerint irreduczibilis egyenlet.

Bauer Mihály.

⋆ Lásd a már idézett König-féle könyvet. Hogy itt az (æqu. mod, $P^{\alpha+1}$) irreduczibilitást hogy értjük, könnyen kivehető a szövegből.

A GRAFIKUS INTERPOLÁCZIÓRÓL.*

Újabb időben gyakorlati problémák megoldásában mind nagyobb teret hóditanak el a grafikus módszerek a számitó eljárások elől: a gyakorlati problémák igen nagy részében ugyanis az ügyesen berendezett szerkesztés aránytalanúl gyorsabban vezet czélhoz, mint a számítás s a pontosság is rendesen megfelel a gyakorlat igényeinek. A grafikus eljárások azonfelül, épen mert vonaldarabokkal, szögekkel — tehát sokkal konkrétebb tárgyakkal — operálnak, mint a szám, sokkal kevésbé fárasztók mint a számítások, sőt áttekinthetőség és biztosság szempontjából is messze fölöttük állanak.

A grafikus eljárások jellemzése s az eddigi grafikus módszerek ismertetése megtalálható az *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften* I. kötetének 1006—1052. lapjain.

A következőkben a raczoniális egész függvények interpolácziójára alkalmazom a szerkesztési eljárást, bemutatom ugyanis miként történhetik a következő feladat megoldása grafikus úton:

Határozzuk meg ama legfölebb $k_1+k_2+\cdots+k_n-1$-edfokú $f(x)$ raczionális egész függvény értékét egy adott x helyen, a mely a következő $k_1+k_2+\cdots+k_n$ feltételnek eleget tesz:

$$\left(\frac{d^j f(x)}{dx^j}\right)_{x=x_r} = u_{rj} \qquad \begin{pmatrix} j=0,1,2,\ldots,k_r-1 \\ r=1,2,\ldots,n \end{pmatrix} \tag{1}$$

a hol $x_1, x_2, \ldots, x_n$ csupa különböző számok és

$$\frac{d^0 f(x)}{dx^0} = f(x).$$

---

* A Math. és Phys. Társulat 1903 február 19-iki üléséből.

Az $f(x)$ függvény x pontbeli értékének megszerkesztése az $f(x)$ amaz expliczit analitikai alakjának segítségével történhetik, a melyet e lapok X. kötetének 387—400. lapjain határoztam meg.

Ezek szerint csak egy az 1) alatti feltételeknek eleget tevő legfölebb $N-1=k_1+k_2+\cdots+k_n-1$-edfokú raczionális egész függvény létezik s ennek alakja:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\substack{r=1,2,\ldots,n\\ j=0,1,\ldots,k_r-1}} a_{rj} u_{rj} \\ \text{a hol: } \quad a_{rj} &= \frac{(x-x_r)^j}{j!}\,\frac{\{\Phi_r(x_r)-(x-x_r)\Phi'_r(x_r)\}^{k_r-j-1}}{\{\Phi_r(x_r)\}^{k_r-j}}\,\Phi_r(x). \end{aligned}\right\} \quad \text{I)}$$

$\Phi_r(x)$ itt a következő szorzat rövid jele:

$$\Phi_r(x)=$$
$$=(x_1-x)^{k_1}(x_2-x)^{k_2}\ldots(x_{r-1}-x)^{k_{r-1}}(x_{r+1}-x)^{k_{r+1}}\ldots(x_n-x)^{k_n}.$$

Látható, hogy, ha az összes adott mennyiségeket, azaz az

$$x;\; x_1, x_2, \ldots, x_n;\; k_1, k_2, \ldots, k_n;\; u_{10}, u_{11}, \ldots, u_{nk_n-1}$$

számokat velük arányos egyenes darabokkal ábrázoljuk a közönséges — háromszögek hasonlóságán alapuló — szerkesztések által az $f(x)$ értékét grafikus úton előállíthatjuk, hiszen $f(x)$ az összes adott mennyiségekből, a mint az I) alatti képlet mutatja, az első négy alapművelet segítségével képezhető. A kérdés tehát az I) alatti képlet által már tulajdonképen meg van oldva, fontos azonban a gyakorlat szempontjából egy lehetőleg áttekinthető, egységes szerkesztési sémának megállapítása, a mely az egyes elemi szerkesztések sorrendjének alkalmas megállapítása s esetleg több elemi szerkesztés összevonása által az általában meglehetősen bonyolúlt I) alatti képlet megszerkesztését ne csak elvben tegye lehetségessé, hanem egy gyakorlatilag lehetőleg egyszerűen keresztülvihető módszert szolgáltasson.

Vizsgáljuk meg e végett előbb az általános feladat két szélső esetét, azt, a melynél a függvénynek csupán értékei vannak megadva több helyen, differencziálhányadosainak értékei azonban nem, tehát:

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 1$$

továbbá azt, a melynél egy helyen van megadva több egymásután következő differencziálhányadosának értéke, azaz:

$$n = 1.$$

Az első eset megoldását a LAGRANGE-féle ismeretes interpoláczió képlet, a másodikét a véges TAYLOR sor szolgáltatja, a melyek az I) alatti képlet speczialis eseteiként közvetlenül kiadódnak.

Megmutatjuk előbb, miként rendezhető be a szerkesztés e speczialis esetekben s azután azt, hogy mikép vezethető vissza az általános szerkesztés e speczialis szerkesztések lánczolatára.

I. *A Lagrange-féle képlet megszerkesztése.* A LAGRANGE-féle képlet a következő:

$$f(x) = \sum_{r=1}^{n} u_r \frac{(x_1-x)\,(x_2-x)\ldots(x_{r-1}-x)\,(x_{r+1}-x)\ldots(x_n-x)}{(x_1-x_r)(x_2-x_r)\ldots(x_{r-1}-x_r)(x_{r+1}-x_r)\ldots(x_n-x_r)}$$

a hol

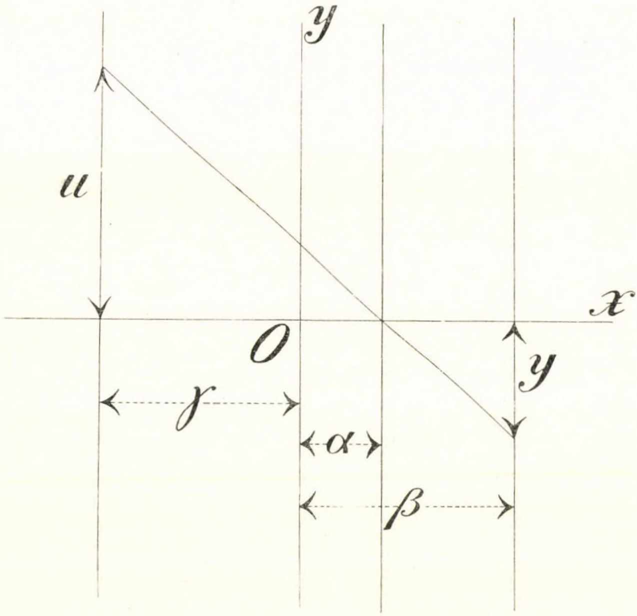
$$u_r = u_{r0}.$$

A szerkesztés alapja a következő elemi szerkesztés (l. az 1. ábrát)

$$y = u\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}.$$

Ha egy derékszögű koordinátarendszer x tengelyére α, β, γ-val arányos egyenes darabokat rakunk fel a 0 ponttól számítva, tekintettel természetesen α, β és γ előjelére is és ha γ-ban az y tengelylyel párhuzamosan felmérjük az u-t, akkor az u végpontját α-val összekötő egyenes a β-ban az x tengelyre emelt merőlegesből épen az y darabot metszi le az x tengelytől számítva, szintén tekintettel az előjelre is. $f(x)$ megszerkesztése csupa ily y alakú mennyiségek megszerkesztésének lánczolatára vezethető vissza, a miből egy igen egyszerű mechanikus eljárás adódik $f(x)$ grafikus előállítására.

Hogy ugyanis $f(x)$-nek, pl. ama tagját megszerkeszszük, a melyben $r=1$, a következő elemi szerkesztéseket kell végeznünk:



1. ábra.

$$y_1 = u_1 \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$$

$$y_{12} = y_{11} \frac{x_3 - x}{x_3 - x_1}$$

$$y_{13} = y_{12} \frac{x_4 - x}{x_4 - x_1}$$

s i. t.

$$Y_1 = y_{1n-1} = y_{1n-2} \frac{x_n - x}{x_n - x_1}$$

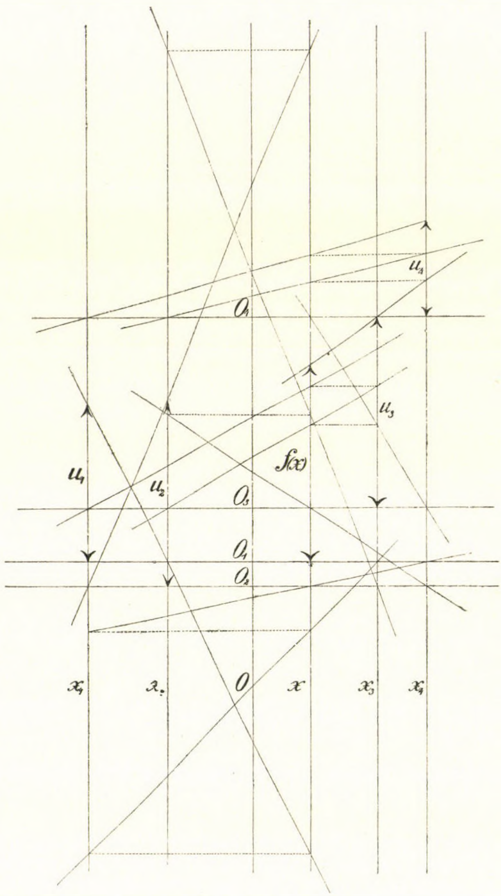
Y_1 már az $f(x)$ első tagja; ép így szerkeszthetők meg az analóg jelentésű Y_2, $Y_3, \ldots, Y_n$ mennyiségek is, a melyek összege magát az $f(x)$-et szolgáltatja.

Tényleges szerkesztéseknél előnyösnek mutatkozott a következő utasitás:

Rakjuk fel egy derékszögű koordinátarendszerben (l. a 2. ábrát) abszczisszákként az

$$x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

mennyiségeket s huzzunk az így nyert $n+1$ ponton keresztül



2. ábra.

párhuzamosakat az y tengelylyel, rakjuk fel továbbá az x_1 pontból kiindúlva ordinátaként az u_1-et.

Kössük össze az u_1 végpontját az x_2 ponttal s ezen egyenesnek az x-beli függélyessel való metszéspontján keresztül, húzzunk egy párhuzamos egyenest az x tengelylyel; ezen egyenesnek az x_1-beli függélyessel való metszéspontja meghatározza az y_1 ordinátát, a melylyel most ugyanazt a szerkesztést végezzük az x_3-ra nézve, mint a melyet u_1-gyel az x_2-re nézve végeztünk; ez által megkapjuk az y_{12}-t s i. t. végre az $y_{1n-1} = Y_1$-t az $f(x)$ összeg első tagját.

A második tag megszerkesztése czéljából előnyös az x tengelyt önmagával párhuzamosan Y_1-gyel eltolni, a mi egyszerűen annyit jelent, hogy Y_1 végpontján keresztül az x tengelylyel egy párhuzamosat húzunk, ez lesz az új x tengely s ennek az egyenesnek az $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$-eken átmenő függélyesekkel való metszéspontjai lesznek az új $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ pontok. A szerkesztés természetesen ugyanúgy folytatódik, mint a hogy megindúlt; most az új x_2-ből kiindulva rakjuk fel ordinátaként az u_2-t, végpontját összekötjük az új x_1-gyel, ez az egyenes kimetszi az x függélyesből az y_{21}-et, ezt fölrakjuk az x_2-re, végpontját összekötjük az x_3-mal s így megkapjuk az $y_{23}, y_{24}, \ldots, y_{2n-1} = Y_2$ mennyiségeket. Y_2 végpontjának ordinátája a régi rendszerben

$$Y_1 + Y_2$$

most ezen a Y_2 ponton keresztül húzunk egy párhuzamost az x tengelylyel és ezt tekintjük új abszczissza tengelynek; a szerkesztést folytatva megkapjuk $Y_3, Y_4, \ldots, Y_n$-t; Y_n végpontjának ordinátája a legelső rendszerben:

$$f(x) = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n.$$

A koordinátarendszer eltologatásának előnye amaz eljárás fölött, a melynél az összes szerkesztéseket ugyanabban a rendszerben végezzük főleg gyakorlati, ugyanis ha ugyanabban a rendszerben maradunk az

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

pontok mindegyike $n+1$ egyenes metszéspontja, a mi a rajz pontosságát elég károsan befolyásolhatja, míg a rendszer eltologatása esetén minden x_r pont csupán három egyenes metszéspontja lesz. A rendszer eltologatásával különben elmarad a külön-külön megszerkesztett Y_r-ek összeadása, mert a legutoljára kimetszett pont ordinátája a legelső rendszerben már maga $f(x)$. Igen kényelmes a szerkesztés pl. millimeterekre beosztott papiron.

Az 1. ábrán az $n = 4$ eset látható.

II. *A véges Taylor sor megszerkesztése.* Az

$$f(x) = u_{10} + \frac{u_{11}}{1!}(x - x_1) + \frac{u_{12}}{2!}(x - x_1)^2 + \cdots + \frac{u_{1k_1-1}}{(k_1-1)!}(x - x_1)^{k_1-1}$$

függvény értékének megszerkesztése az x független változó adott értékénél tulajdonképen az $x - x_1$ független változó oly racziónális egész függvénye értékének megszerkesztése, a melynek együtthatói ismeretesek: nincsenek ugyan közvetlenül megadva, de az adott mennyiségekből az u_{1j}-kből $j\,!$-sal való osztás útján kaphatók, j pedig tényleges gyakorlati problémáknál soha nem oly nagy szám, hogy $j\,!$-sal való osztás elvégzése végett egy külön szerkesztést kellene véghez vinni. Ha valóban szükség volna (nagyobb j-knél) $\frac{u_{1j}}{j\,!}$ megszerkesztésére, akkor a legelőnyösebb ezt is az

$$y = u \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \gamma}$$

elemi szerkesztésekre visszavezetni, még pedig következőképen:

$$y_1 = u_{1j} \frac{0-1}{0-2}$$

$$y_2 = y_1 \frac{0-1}{0-3}$$

$$y_3 = y_2 \frac{0-1}{0-4}$$

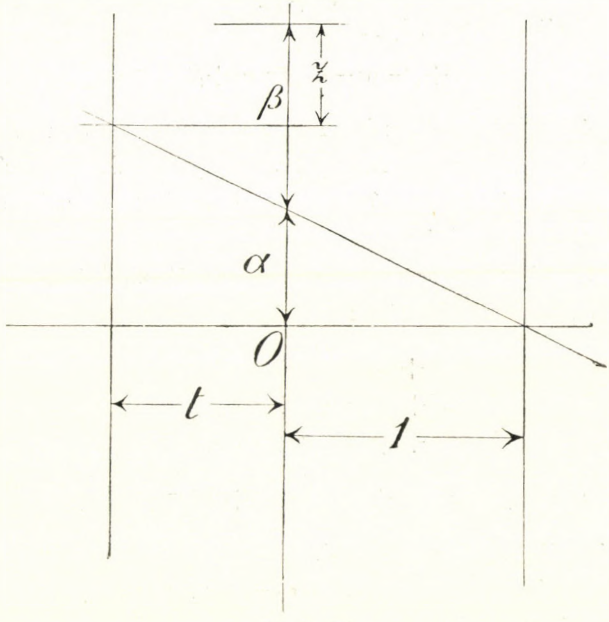
$$\cdots\cdots$$

$$\frac{u_{1j}}{j\,!} = y_{j-2} \frac{0-1}{0-j}.$$

A véges Taylor sor által megadott $f(x)$-et tehát minden esetre meg tudjuk szerkeszteni, ha van módszerünk a

$$f_1(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \cdots + a_{m-1} t + a_m$$

adott együtthatókkal biró raczionális egész függvény t pontbeli értékének megszerkesztésére. Erre nézve pedig még 1761-ben megjelent Segner János András hazánkfia egyszerű utasítása a a Novi Commentarii Academiæ Petropolitanæ 7-dik kötetének (pro 1758—59) 211. lapján.*



3. ábra.

Segner elemi szerkesztése a következő (l. a 3. ábrát)

$$z = at + \beta$$

z megszerkesztése végett felrakjuk egy derékszögű koordinátarendszerben az abszczisszák tengelyére a tetszőleges egységet

* Ismertetve az Encyclopädie der math. Wiss. I. kötetének 1011. lapján.

és a t-t ebben az egységben kifejezve; az ordináták tengelyére felrakjuk, tekintettel az előjelre, az a-t s a végpontjából kiindulva a β-t még pedig fölfelé ha pozitiv, lefelé ha negativ. Ha most az a végpontját az abszczissza tengely 1 pontjával egy egyenes által összekötjük, ez az egyenes a t-ben emelt függélyest oly pontban metszi, a melynek ordinátája:

$$y = a - at.$$

Az a végpontjából fölrakott β végpontjának ordinátája

$$a + \beta.$$

E két ordináta különbsége:

$$a + \beta - (a - at) = at + \beta = z$$

nem egyéb, mint a két szóban forgó ponton átmenő vízszintes egyenesek merőleges távolsága, a mely pozitivnak számít, ha az $a+\beta$ ordinátával biró pont magasabban fekszik mint az $a-at$ ordinátával biró pont.

Ezen elemi szerkesztésre pedig a következő módon vezethető vissza $g(t)$ megszerkesztése:

$$\begin{aligned}
z_1 &= a_0t + a_1 \\
z_2 &= z_1t + a_2 = a_0t^2 + a_1t + a_2 \\
z_3 &= z_2t + a_3 = a_0t^3 + a_1t^2 + a_2t + a_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_1(t) = z_n &= z_{n-1}t + a_n = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \cdots + a_n.
\end{aligned}$$

A második elemi szerkesztésnél előnyös az abszczissza tengelyt önmagával párhuzamosan $a_0 - a_0t$-vel (az a_0 végpontját az 1 ponttal összekötő egyenes a t-ben emelt függélyest oly pontban metszi, melynek ordinátája $a_0 - a_0t$; ezen a ponton fog átmenni az új abszczissza tengely). A harmadik elemi szerkesztésnél az abszczissza tengelyt $z_1 - z_1t$-vel toljuk el, a negyediknél $z_2 - z_2t$-vel s í. t. Ezzel azt érjük el, hogy az

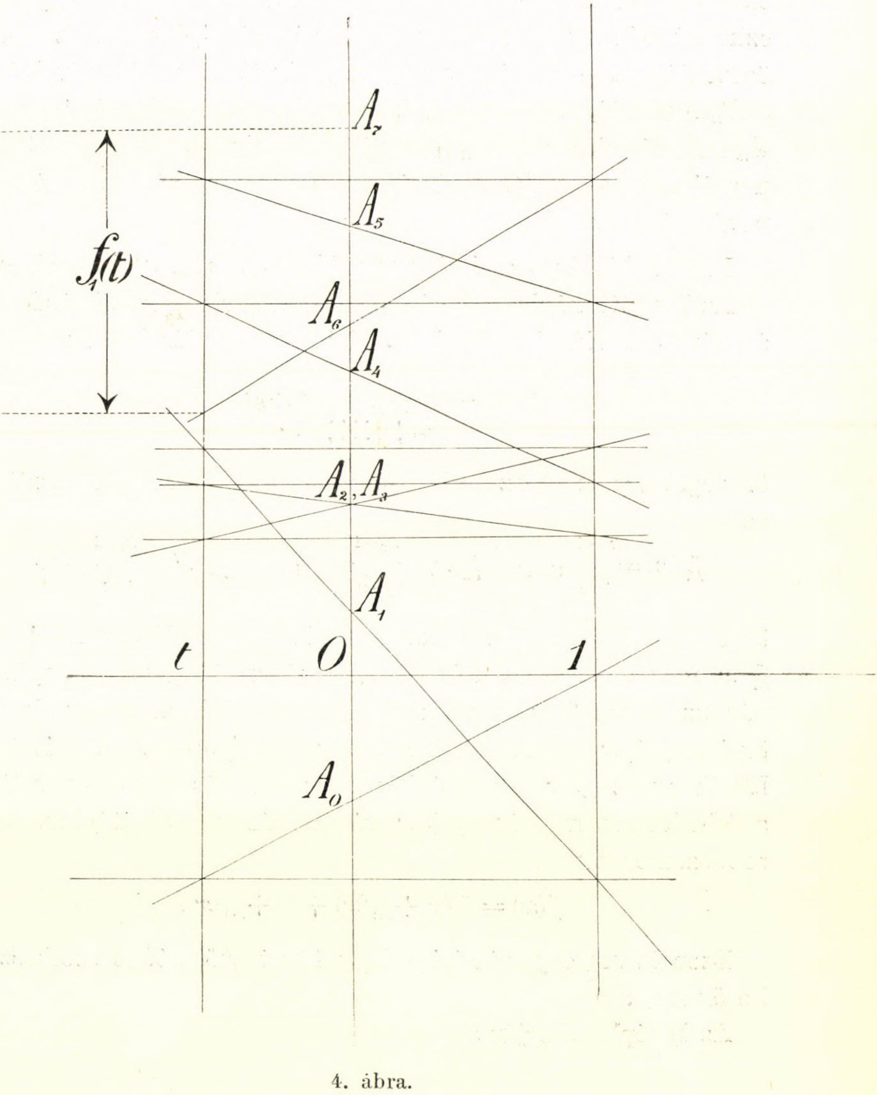
$$a_0, a_1, \ldots, a_n$$

együtthatókat csak egyszer kell felraknunk az egész szerkesztés folyamán s a következő egyszerű eljárás vezet $f_1(t)$ értékéhez:

Rakjuk fel az ordináta tengelyre az

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n$$

mennyiségekkel arányos egyenes darabokat (l. a 4. ábrát) még pedig a_0-t a 0-ból, a_1-t $a_0\,A_0$ végpontjából, a_2-t $a_1\ A_1$ végpontjá-



4. ábra.

ból kiindulva s. i. t. fölfelé ha pozitiv, lefelé ha negativ, húzzunk az 1 és a t pontokban egy-egy függélyest s kössük össze egy egyenes által A_0-t az 1 ponttal; ennek az egyenesnek metszéspontja a t függélyessel legyen B_0, s egy B_0-ban húzott vízszintes messe az 1 függélyest C_0-ban. Most C_0 és A_1-n át húzunk egy egyenest, ez a t függélyest B_1-ben metszi, ezen a ponton ismét egy vízszintest húzunk, a mely az 1 függélyest C_1-ben metszi, C_1-t összekötjük A_2-vel s i. t. az A_n-ben húzott vízszintes távolsága a B_{n-1} ponttól a keresett $f_1(t)$, a mely pozitivnak számít, ha a A_n-beli vízszintes a B_{n-1} pont fölé esik, ellenkező esetben negativnak. A mellékelt ábrán $n=7$; $a_3=0$ lévén az A_2 és A_3 pontok összeesnek.

III. *Az általános eset visszavezetése az I. és II. alatti esetekre.* Az I) alatti képlet alapján egyszerűen visszavezethetjük az általános problémát az I. és II. alatti szerkesztésekre. Az

$$f(x) = \sum_{\substack{r=1,2,\ldots,n \\ j=0,1,\ldots,k_r-1}} a_{rj} u_{rj}$$

összeget úgy szerkeszthetjük meg, hogy külön megszerkesztjük az

$$f_1(x) = \sum_{j=0}^{k_1-1} a_{1j} u_{1j}, \quad f_2(x) = \sum_{j=0}^{k_2-1} a_{2j} u_{2j}, \ldots, f_n(x) = \sum_{j=0}^{k_n-1} a_{nj} u_{nj}$$

tagokat s ezeket összeadjuk; természetesen előnyös ismét az $f_1(x)$ megszerkesztése után az abszczissza tengelyt önmagával párhuzamosan $f_1(x)$-szel eltolni, ezen új rendszerben szerkeszteni meg $f_2(x)$-et, az abszczissza tengelyt $f_2(x)$-szel eltolni s i. t. Minthogy az $f_r(x)$-ek mint bizonyos metszéspontok ordinátái adódnak ki az utolsónak, $f_n(x)$ végpontjának ordinátája az első rendszerben maga

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x).$$

Ezen összeg egyes tagjai pedig a következő módon szerkeszthetők meg:

Az I) képlet alapján:

$$a_{rj} = \frac{(x-x_r)^j}{j!}\left(\frac{\Phi_r(x_r) - (x-x_r)\Phi'_r(x_r)}{\Phi_r(x_r)}\right)^{k_r-j-1}\frac{\Phi_r(x)}{\Phi_r(x_r)}$$

és mivel:

$$\Phi'_r(x) = -\Phi_r(x)\left(\frac{k_1}{x_1-x} + \frac{k_2}{x_2-x} + \cdots + \frac{k_{r-1}}{x_{r-1}-x} + \right.$$

$$\left. + \frac{k_{r+1}}{x_{r+1}-x} + \cdots + \frac{k_n}{x_n-x}\right),$$

bevezetve a következő jelölést:

$$\frac{k_1}{x_1-x_r} + \frac{k_2}{x_2-x_r} + \cdots + \frac{k_{r-1}}{x_{r-1}-x_r} +$$

$$+ \frac{k_{r+1}}{x_{r+1}-x_r} + \cdots + \frac{k_n}{x_n-x_r} = U_r$$

azt, kapjuk, hogy:

$$a_{rj} = \frac{(x-x_r)^j}{j!}\left(1 + (x-x_r)\,U_r\right)^{k_r-j-1}\frac{\Phi_r(x)}{\Phi_r(x_r)}$$

s innen

$$f_r(x) = \sum_{j=0}^{k_r-1} a_{rj}u_{rj} = \left\{\sum_{j=0}^{k_r-1} u_{rj}\frac{(x-x_r)^j}{j!}\left(1+(x-x_r)\,U_r\right)^{k_r-j-1}\right\}\frac{\Phi_r(x)}{\Phi_r(x_r)} =$$

$$= F_r(x)\frac{\Phi_r(x)}{\Phi_r(x_r)}. \qquad 2)$$

Látható, hogy ha $F_r(x)$-et megszerkesztettük, ebből ugyanazzal az eljárással, a melylyel a LAGRANGE-féle képletet megszerkesztettük, megszerkeszthetjük $f_r(x)$-et is, minthogy $\Phi_r(x)$ ugyanannyi gyöktényezőnek szorzata, mint $\Phi_r(x_r)$ s az

$$y = u\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}$$

elemi szerkesztés közvetlenül alkalmazható.

$$f(x) = F_1(x)\frac{\Phi_1(x)}{\Phi_1(x_1)} + F_2(x)\frac{\Phi_2(x)}{\Phi_2(x_2)} + \cdots + F_n(x)\frac{\Phi_n(x)}{\Phi_n(x_n)}$$

megszerkesztése tehát ugyanazon séma szerint végezhető, a mely szerint a LAGRANGE-féle képletet szerkesztettük, hacsak meg tudjuk szerkeszteni az

$$F_1(x),\ F_2(x), \ldots, F_n(x)$$

mennyiségeket.

Meg fogjuk mutatni, miképen lehet $F_r(x)$ megszerkesztését a SEGNER-féle szerkesztésre visszavezetni s ezzel megmutattuk, hogy az I. és II. alatti alapszerkesztések segítségével $f(x)$ megszerkesztése az általános esetben is mindig megtörténhetik.

A 2) szerint ugyanis:

$$F_r(x) = \sum_{j=0}^{k_r-1} u_{rj}\,\frac{(x-x_r)^j}{j!}\,\bigl(1+(x-x_r)\,U_r\bigr)^{k_r-j-1} =$$

$$= u_{r0}\left\{1 + \binom{k_r-1}{1}(x-x_r)\,U_r + \binom{k_r-1}{2}(x-x_r)^2 U_r^2 + \cdots + \right.$$

$$\left. + \binom{k_r-1}{k_r-2}(x-x_r)^{k_r-2} U_r^{k_r-2} + (x-x_r)^{k_r-1} U_r^{k_r-1}\right\} +$$

$$+ \frac{u_{r1}}{1!}\left\{(x-x_r) + \binom{k_r-2}{1}(x-x_r)^2 U_r + \binom{k_r-2}{2}(x-x_r)^3 U_r^2 + \cdots + \right.$$

$$\left. + \binom{k_r-2}{k_r-2}(x-x_r)^{k_r-1} U_r^{k_r-2}\right\} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{u_{rk_r-2}}{(k_r-2)!}\left\{(x-x_r)^{k_r-2} + (x-x_r)^{k_r-1}\,U_r\right\} +$$

$$+ \frac{u_{rk_r-1}}{(k_r-1)!}(x-x_r)^{k_r-1} = (x-x_r \text{ fogyó hatványai szerint rendezve})$$

$$= \left\{u_{r0} U_r^{k_r-1} + \frac{u_{r1}}{1!} U_r^{k_r-2} + \frac{u_{r2}}{2!} U_r^{k_r-3} + \frac{u_{r3}}{3!} U_r^{k_r-4} + \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{u_{rk_r-2}}{(k_r-2)!} U_r + \frac{u_{rk_r-1}}{(k_r-1)!}\right\}(x-x_r)^{k_r-1} +$$

$$+ \left\{u_{r0}\binom{k_r-1}{1} U_r^{k_r-2} + \frac{u_{r2}}{1!}\binom{k_r-2}{1} U_r^{k_r-3} + \frac{u_{r2}}{2!}\binom{k_r-3}{1} U_r^{k_r-4} + \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{u_{rk_r-3}}{(k_r-3)!}\, 2U_r + \frac{u_{rk_r-2}}{(k_r-2)!}\right\}(x-x_r)^{k_r-2} +$$

$$+ \left\{u_{r0}\binom{k_r-1}{2} U_r^{k_r-3} + \frac{u_{r1}}{1!}\binom{k_r-2}{2} U_r^{k_r-4} + \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{u_{rk_r-4}}{(k_r-4)!}\, 3U_r + \frac{u_{rk_r-3}}{(k_r-3)!}\right\}(x-x_r)^{k_r-3} +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \left\{u_{r0}(k_r-1)\,U_r + \frac{u_{r1}}{1!}\right\}(x-x_r) + u_{r0}.$$

$F_r(x)$, a mint látható $(x-x_r)$ oly raczionális egész függvénye, a melyben az együtthatók az *x-től független* U_r-nek adott együtthatókkal biró raczionális egész függvényei.

Ha tehát az U_r-t ismerjük, ebből SEGNER szerkesztése által megkaphatjuk először is $F_r(x)$ együtthatóit, s ha ezeket előállítottuk ismét SEGNER szerkesztése által magát az $F_r(x)$-et.

Az U_r megszerkesztése pedig szintén ugyanazon séma szerint történhetik, mint a LAGRANGE-féle $f(x)$ szerkesztése, hiszen

$$U_r = k_1\frac{x_r-(x_r-1)}{x_r-x_1}+k_2\frac{x_r-(x_r-1)}{x_r-x_2}+\cdots+$$

$$+k_{r-1}\frac{x_r-(x_r-1)}{x_r-x_{r-1}}+k_{r+1}\frac{x_r-(x_r-1)}{x_r-x_{r+1}}+\cdots+k_n\frac{x_r-(x_r-1)}{x_r-x_n}. \quad 3)$$

Így a következő utasítást állíthatjuk össze $f(x)$-nek a legáltalánosabb esetben való megszerkesztésére nézve:

a) Mindenekelőtt meg kell szerkesztenünk a 3) alatti képlet szerint az

$$U_1,\ U_2,\ldots,\ U_n$$

mennyiségeket; fontos, hogy a U-k x-től függetlenek, tehát ugyanazokat a U-kat használhatjuk, ha ugyanazon adatok meghatározta $f(x)$ értékét keressük az x több értéke mellett.

b) SEGNER szerkesztése alapján megszerkesztjük a

$$F_1(x),\ F_2(x),\ldots,\ F_n(x)$$

függvényeket, a hol

$$F_r(x) = A_{r0}(x-x_r)^{k_r-1}+A_{r1}(x-x_r)^{k_r-2}+\cdots+$$
$$+A_{rk_r-2}(x-x_r)+A_{rk_r-1}$$

$F_r(x)$-et $(x-x_r)$ raczionális függvényének tekintve, együtthatói szintén függetlenek az x-től és szintén SEGNER szerkesztésével mint U_r raczionális egész függvényei adott vagy az adottakból egyszerűen kiszámítható mennyiségek segítségével megszerkeszthetők; ugyanis $(x-x_r)^{k_r-j-1}$ együtthatója

$$A_{rj} = u_{r0}\binom{k_r-1}{j}U_r^{k_r-j-1} + \frac{u_{r1}}{1!}\binom{k_r-2}{j}U_r^{k_r-j-2} + \cdots +$$
$$+ \frac{u_{rk_r-j-2}}{(k_r-j-2)!}(j+1)U_r + \frac{u_{rk_r-j-1}}{(k_r-j-1)!}.$$
$$(j=0, 1, 2, \ldots, k_r-1$$

c) A $F_r(x)$-ekből a LAGRANGE-féle képletnél alkalmazott eljáráshoz hasonló módon képezhető az

$$f(x) = F_1(x)\frac{\Phi_1(x)}{\Phi_1(x_1)} + F_2(x)\frac{\Phi_2(x)}{\Phi_2(x_2)} + \cdots + \frac{\Phi_n(x)}{\Phi_n(x_n)}$$

a hol

$$\Phi_r(x) =$$
$$= (x_1-x)^{k_1}(x_2-x)^{k_2}\ldots(x_{r-1}-x)^{k_{r-1}}(x_{r+1}-x)^{k_{r+1}}\ldots(x_n-x)^{k_n}.$$
$$(r=1, 2, \ldots, n)$$

Zemplén Győző.

OSTWALD ELVE
AZ ENERGIAFORGALOMRÓL A MECHANIKÁBAN.[1]

1. OSTWALD «Allgemeine Chemie»[2] czímű nagyszabású munkájában a következő elvet, a legnagyobb energiaforgalom elvét állitá fel:

Minden lehetséges energiaátalakulás közül az fog létesülni, a mely adott időben a legnagyobb forgalmat engedi meg.

Lehetséges energiaátalakuláson pedig azt érti, a mely az energia megmaradásának elvével és az anyagi rendszer kényszerfeltételeivel megegyez.

Ezt az elvet C. NEUMANN[3] közelebbi vizsgálatnak vetette alá abban a speciálesetben, a midőn az adott anyagi rendszer kezdetben nyugalomban van és a midőn ebből a nyugalmi helyzetből kiinduló mozgásról csak az első időelemben van szó. Eredményét a következő tétel fejezi ki:

«*Bármilyen kényszerfeltételeknek alávetett anyagi rendszer mozogjon adott potencziálos erők behatása alatt.*»

«*Ha ez a rendszer egy végtelen kicsiny τ időelem elején nyugalomban van, akkor az összes, ama kényszerfeltételekkel és az eleven erő elvének formulájával megegyező, virtuális mozgások között egy létezik, a melynek eleven ereje az adott τ idő végén a legnagyobb. Ez az egy lesz az a mozgás, a mely az adott erők behatása alatt a τ időben valóban létesül.*»

---

[1] E dolgozat a «Mathematikai és Természettudományi Értesitő»-ben 1903-ban ugyane czím alatt megjelent értekezésem 2. §-át új átdolgozásban nyujtja és azonkívül lényegesen újat is tartalmaz.

[2] 1902, I. kötet, 36., 37, lap.

[3] Berichte der k. sächs. Gesell. d. Wiss. 1892, 44. kötet, 187. lap.

Az elvet A. VOSS,[1] ZEMPLÉN GYŐZŐ[2] és E. FÖRSTER[3] a mozgás további folyamában vetették vizsgálat tárgyává és azt találták, hogy NEUMANN formulázása a mozgás további folyamában nem alkalmas a mechanikai jelenségek leirására és megjegyzem, hogy VOSS és FÖRSTER a NEUMANN tételét az idézett helyen egyenlő módon általánositották.

Azonban OSTWALD és NEUMANN formulázásai között jelentékeny különbség van. Míg NEUMANN a virtuális mozgásokat a sebességekkel arányosoknak felvéve az elv fogalmazásánál és alkalmazásánál e sebességeket variálja, addig OSTWALDnál erről szó sincs. Igaz, hogy ez utóbbi csak igen speczialis esetben részletezi, hogy az elv alkalmazása módját mikép gondolja; e speczialeset tárgyalása módjának elemzése azonban azt fogja mutatni, hogy a helyzeteket egész speczialis módon variálja és hogy a sebességek variácziója csak másodsorban, csak mint a helyzetkülönbségek folyománya jő tekintetbe. E speczialis eset tárgyalási módját fogom itt a legáltalánosabb esetre kiterjeszteni.

2. Legyen megengedve mindenekelőtt OSTWALD úr példáját és a hozzátartozó bizonyitásmódot megbeszélnem:[4]

Egy anyagi pont sebessége O pontban zérus és csak a nehézségi erő hat rá. Az energia megmaradásának az elvéből következik, hogy a pont nem fog felemelkedni az O nivója fölé. Ha azonban O-ból kiinduló egyenes pályákat gondolunk az O nivója alatt és a függélyest is, és ha ezeken gondoljuk az anyagi pont mozgását, úgy a hogy az, az energia megmaradásának elve értelmében, végbe mehet, akkor az egyazon t időponthoz tartozó A helyzetek mértani helye egy gömb, melynek függélyes átmérője OA_0-sal azonos, ha A_0 az anyagi pontnak a függélyesen való helyét jelöli a t időpontban. E szerint a potencziális energia változása a valódi pályán t idő alatt nagyobb, mint

[1] Sitzungsberichte der k. b. Akad. d. Wiss. 1901, 53., 167. lap.
[2] Math. és Phys. Lapok 1902, 318. lap.
[3] Zeitschrift für Math. u. Phys. 49. kötet, 84. lap.
[4] L. c. 37. lap.

valamennyi többi pályán, melyen az energia megmaradásának elve értelmében végig mehetne.

Így hát Ostwald az eleven erő megmaradásának elvét kifejező egyenletet integrálja, azután a t idő eliminálásával mindent helyzetkülönbségre gondol redukálva: a potencziális energia növekedésének szélső értékére vonatkozó elv csak a redukczió után alkalmazandó.

Miután az integrálás az általános probléma esetén nem is gondolható, és így a t eliminálása lehetetlen, azért az eliminálás az integrálásnak a kikerülésével lesz végzendő, és a nevezett helyzetkülönbségek közötti vonatkozás más módon állapitandó meg. E megállapitásnál jó szolgálatot fognak tenni azok a vonatkozások, a melyek a tárgyalt példában, a helyzetkülönbségekre vonatkozólag kiadódnak. Miután ugyanis az a tétel, hogy függélyes eséskor adott idő alatt mélyebbre jut a súlyos anyagi pont, mint bármely más ugyanabból a pontból kiinduló pályán, miként ismeretes, szigorúan igaz, tehát a függélyes környezetére nézve mindegy, akár görbének, akár egyenesnek tekintem a variált pályát; az egyenlő t időtartamokhoz tartozó A_0A helyzetkülönbségek határhelye az A_0 ponton átmenő vízszintes sík. Jelölve tehát q_1, q_2, q_3-mal az A_0 pont derékszögű kartéziusi koordinátáit és δq_1, δq_2, δq_3-mal az A_0A határhelyének projekczióit a koordinatatengelyek irányában, a következő két egyenértékű homogén egyenlet áll fenn:

$$q'_1\delta q_1 + q'_2\delta q_2 + q'_3\delta q_3 = 0, \tag{1'}$$

$$q''_1\delta q_1 + q''_2\delta q_2 + q''_3\delta q_3 = 0. \tag{1''}$$

Ez előzetes megbeszélés után bátorkodom félreértések kikerülése végett különösen hangsúlyozni, hogy az általános probléma tárgyalásánál nem tekintendő lényeges dolognak, hogy a potencziális energiának valóban van-e szélső értéke: a kérdés csakis az lesz, hogy a virtuális eltolásoknak Ostwald-féle korlátozása mellett az a kikötés, hogy a potencziális energia első variácziója $\delta U = 0$ legyen, olyan mozgásegyenletekre vezet-e, a melyek a tapasztalatokkal megegyeznek, avagy olyanokra, a melyek azokkal ellenmondásban állanak.

3. Legyen előbb szabad pontrendszer adva; a tömeg számára, melynek helyét

$$q_{3j-2},\ q_{3j-1},\ q_{3j}$$

derékszögű kartéziusi koordináták határozzák meg, rövidítésül és szimmetria szempontjából

$$m_{3j-2} = m_{3j-1} = m_{3j}$$

jelölést alkalmazzunk; így a pontrendszer eleven ereje

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} m_i q_i'^2.$$

Jelöltessék továbbá a pontrendszer potencziális energiája $-U$-val, és összes energiája E-vel, úgy hogy

$$E = T - U. \tag{2}$$

Felteszem, hogy az összes energia úgy a valódi mint a variált helyzetben állandó. A valódi pontrendszerpályán tehát, H-val az állandó energiát jelölvén

$$T - U = H; \tag{2'}$$

a variált pontrendszerpályán pedig, mely ugyanabból a kezdőhelyzetből induljon ki mint a valódi, teljesítendő e variácziós egyenlet:

$$\delta(T - U) = 0. \tag{2''}$$

A variáczió végzésénél az előzetes megbeszélés értelmében helyzetek hasonlítandók össze, a melyek egyazon t időpontban foglaltatnak el a valódi és a variált pályán: e szerint $\delta t = 0$. Így hát δq_i-vel jelölvén a q_i koordináta különbségét az ő t időpontbeli értékéhez képest a variált pályán, áll, hogy

$$\delta q_i' = \frac{d\delta q_i}{dt}.$$

Ebből folyólag a (2″) variácziós egyenlet, feltéve csak, hogy a mozgás és a variácziók a szóba jövő időtartamban regulárisok, így szól:

$$\frac{d}{dt}(\sum m_i q_i' \delta q_i) - \sum m_i q_i'' \delta q_i - \delta U = 0,$$

mely egyenlet æquivalens ez egyenletrendszerrel

$$\sum_{i=1}^{3n} m_i q_i' \delta q_i = \Phi(t), \tag{3'}$$

$$\delta U + \sum_{i=1}^{3n} m_i q_i'' \delta q_i = \Phi'(t), \tag{3''}$$

hol $\Phi(t)$ és az ő deriváltja $\Phi'(t)$ folytonos időfüggvények, melyek kezdetbeli értékei (a δq_i-k kezdetbeli értékeire vonatkozó megállapodásnál fogva) elenyésznek.

Miután a (3') és (3'') egyenletek identikus átalakítások révén adódtak, azért a következtetések különben bármilyen $\Phi(t)$ mellett megfordíthatók; ha ugyanis (2') egy és (3'), (3'') más részről érvényes, akkor az összes energia a valódi pályán állandó maradván az marad a variált pályán is, t. i. $= H$.

Kérdezem már mostan, miféle mozgásegyenletek erednek az anyagi pontrendszer számára, ha azt követelem, hogy a

$$\delta U = 0 \tag{4}$$

egyenlet a (3'), (3'') rendszer következménye legyen?

Miután akkor a

$$\delta U \equiv (1+\lambda) \sum m_i q_i'' \delta q_i + \mu \sum m_i q_i' \delta q_i, \tag{4'}$$

$$0 = (1+\lambda)\Phi'(t) \qquad + \mu\Phi(t) \tag{4''}$$

egyenleteknek kell állaniok, hol λ és μ időfüggvényeket jelentenek, a melyek a mozgási egyenletekben való szereplésüknél fogva minden előforduló esetben egyértékűleg meghatározott véges mennyiségek, miután továbbá $1+\lambda$ természetesen nem $=0$, tehát a (4'') egyenletből arra való tekintettel, hogy $\Phi(t)$ és deriváltja $\Phi'(t)$ értékei kezdetben zérusok, az következik, hogy

$$\Phi(t) \equiv 0.$$

Ez megegyezésben áll a 2. pontbeli (1') és (2'') biztositott egyenletekkel, míg a $\Phi(t) \neq 0$ felvétel ellenmondásban állana velük; tényleg a (3'), (3'') a nevezettekbe megy át, ha bennük $\Phi(t) = 0$ és $\big((4)$ szerint$\big)$ egyúttal $\delta U = 0$ tétetik, mihelyt csak egyetlen egy anyagi pontra szorítkozunk.

4. Az OSTWALD problémája ezek után így formulázandó:

Adva van egy anyagi pontrendszer, a melyre időtől explicite független potencziállal rendelkező erők hatnak, és a mely időtől független kényszereknek van alávetve. Ennélfogva a pontrendszer összes energiája a valódi mozgásban állandó.

Korlátoztassék a pontrendszer virtuális eltolásainak a rendszere ez eltolások között fennálló ama homogén egyenletekkel, a melyek $\delta t = 0$ mellett a $\delta(T-U)$ elenyészésére szükségesek és elegendők; és neveztessék az így meghatározott rendszer a megengedett virtuális eltolások rendszerének.

Meghatározandók azok a mozgásegyenletek, a melyek a pontrendszer számára adódnak, ha megkövetelem, hogy $\delta U = 0$ egyenlet teljesüljön a megengedett virtuális eltolások rendszerében?

Ha az anyagi pontrendszer kényszereit

$$F_j = 0 \qquad (j=1, 2, \ldots, \nu) \tag{5}$$

egyenletek szabják meg, hol az F_j-k csakis a q_i-któl függnek, és ha λ_j időfüggvények, akkor a mozgásegyenletek formailag a

$$\delta U \equiv (1+\lambda)\sum m_i q_i''\delta q_i + \mu\sum m_i q_i'\delta q_i + \sum_{j=1}^{\nu}\lambda_j \delta F_j \tag{6}$$

identitásból következnek, a mely a (4')-ből a $\lambda_j \delta F_j$ tagok hozzáadásával ered. A mozgásegyenletek alakra ezek:

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = m_i q_i'' + \lambda m_i q_i'' + \mu m_i q_i' + \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial q_i}, \tag{7}$$
$$\begin{pmatrix} i=1, 2, 3; & \ldots; & 3n-2, 3n-1, 3n \\ m_1=m_2=m_3; & \ldots; & m_{3n-2}, m_{3n-1}, m_{3n} \end{pmatrix}.$$

Az eleven erő elvének levezetésénél szokásos eljárás szerint e (7) rendszerből ered

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dT}{dt} + \lambda \frac{dT}{dt} + 2\mu T;$$

tekintettel tehát a (2′) egyenlet kifejezte eleven erő elvére, a következő vonatkozást nyerjük λ és μ között:

$$0 = \lambda \frac{dT}{dt} + 2\mu T. \tag{8}$$

A λ, μ, λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ időfüggvények meghatározására e (8) alattin kívül még az (5) alattiak, tehát összesen $\nu+1$ egyenlet áll rendelkezésünkre, míg az ismeretlenek száma $\nu+2$. Ha felteszszük, hogy $\mu=0$, akkor a (8) egyenletből folyólag λ is elenyészik; akkor tehát az egyenletrendszer a LAGRANGE mozgási egyenleteibe megy át.

Vizsgáljuk még meg $\lambda \neq 0$ esetében a

$$Q_i = m_i(\lambda q_i'' + \mu q_i'),$$
$$(i=1, \ldots, 3n)$$

járulékos erőket, a melyek a (8) alapján így írhatók:

$$Q_i = m_i \lambda \left(q_i'' - \frac{dT}{dt} \frac{q_i'}{2T} \right),$$
$$(i=1, \ldots, 3n).$$

Ha t_0 időben a rendszer valamennyi pontjának a sebessége $=0$, akkor t_0 időben valamennyi Q_i erő is $=0$. Ugyanis

$$\frac{dT}{dt} \frac{q_i'}{2T} = \frac{q_i' \Sigma q_i' q_i''}{\Sigma q_i' q_i'},$$

tehát

$$\lim_{t-t_0=0} \frac{q_i'}{t-t_0} = q_i''$$

folytán

$$\lim \frac{dT}{dt} \frac{q_i'}{2T} = q_i''.$$

Így hát a mozgás kezdetén a (7) rendszer mindenesetre azonos LAGRANGE mozgási egyenleteivel. Ez megegyez a NEUMANN tételével.

Ha az anyagi rendszer csak egy pontból áll, melynek koordinátái x, y, z-vel jelöltessenek, akkor a járulékos erő komponensei

$$X = m\lambda\left(x'' - \frac{dv}{dt}\frac{x'}{v}\right),$$
$$Y = m\lambda\left(y'' - \frac{dv}{dt}\frac{y'}{v}\right), \qquad (9')$$
$$Z = m\lambda\left(z'' - \frac{dv}{dt}\frac{z'}{v}\right),$$

Az erő iránya azonos a pálya első görbületsugarának irányával és pozitiv λ esetén a görbületi középponttól a pálya ellen irányul. Az erő nagysága, r-rel a görbületi sugarat jelölve,

$$= \lambda m \frac{v^2}{r}\cdot$$

A járulékos erő e szerint $=0$, akár a midőn $v = 0$, akár a midőn a pálya görbülete $=0$. Egy anyagi pont, a mely szabadon mozogna egy olyan térrészben, a melyben e járulékos erő hat reá, ezenkívül pedig semmi más erő, egyenes vonalat irna le állandó sebességgel, összhangzásban Galilei elvével. Ha az U potencziál meghatározta szabad erő is hatna a szabadon mozgó anyagi pontra, de a sebesség arányában, akkor a mozgást az eleven erő elve egymagában határozván meg, az a természetes mozgással volna azonos. Ha azonban az U potencziál okozta szabad erő nem a sebesség irányában működik, akkor az anyagi pont gyorsulásának csak a tangencziális komponense $= \frac{1}{m}$-szer a szabad erő tangencziális komponensével, míg a normális komponensre $\neq \frac{1}{m}$ szer a szabad erő normális komponensével.

Hasonló törvények érvényesek a pontrendszerre nézve is.

Ha valamely tünemény ilyen mozgásban lelné képét, akkor azt mondanók, hogy a pontrendszer egy közegben mozog, mely reá azokat a járulékos erőket gyakorolja. Newton súlypontról szóló törvényével így megegyezésben maradnánk.

5. Midőn a (6) identitásról áttértünk volt a (7) egyenletrendszerre, hallgatva feltettük, hogy a pontrendszer szabadságfoka

>2; ugyanis a virtuális eltolásokat korlátozó egyenletek száma $=2$; azért a variáczióproblémánál a szabadon választható δq_i-k száma a szabadság fokánál kettővel kisebb. Ha a pontrendszer szabadságfoka $\leqq 2$, akkor az előző 4. pontban felállitott problémának nincs megoldása.

E hiányon mindenesetre segiteni lehet oly módon, hogy az adott pontrendszerhez egy második tőle független konzervativ rendszert adjungálunk, melynek szabadságfoka $\geqq 2$ és Ostwald-nak a virtuális eltolásokra vonatkozó korlátozását módositva, azt a két pontrendszerből *összetett* rendszerre terjesztjük ki. Ily módon egyúttal eszköz fog rendelkezésünkre állani arra, hogy az előző 4.-ban leirt mozgások sokaságából az úgynevezett természetes mozgások sokaságát kiemeljük.

Ugyanis áll a következő tétel:

Legyen egy pontrendszer több magában véve konzervativ pontrendszerből összetéve, melyek eleven ereje és potencziálja

$$T_h, \; U_h; \quad (h=1, 2, \ldots, k)$$

korlátoztassék a pontrendszer virtuális eltolásainak a rendszere azokkal a homogén egyenletekkel, a melyek az összes energia variácziójának, azaz

$$\delta(T-U) \equiv \delta \sum_{h=1}^{k} (T_h - U_h)$$

összegnek az elenyészésére szükségesek és elegendők; és követeljük meg, hogy az így megengedett virtuális eltolások körében

$$\delta U \equiv \delta \sum_{h=1}^{k} U_h = 0$$

legyen.

E követelésnek csak két osztályba tartozó mozgás felel meg: az egyik osztályt a Lagrange differencziálegyenletek meghatározta mozgások alkotják; a másik osztályba tartozó mozgásokat az a nagyon speciális tulajdonság jellemzi, hogy $T_h : T$ viszonyok értékei az egész mozgás folyamán valamennyien állandók maradnak.

Ugyanis a (7) alatti egyenletek rendszere, a mely az egész anyagi pontrendszer számára így kiadódik, k csoportba osztható, a melyek mindegyike a (8) egyenlet mintájára egy-egy konzervativ pontrendszer-csoport számára

$$0 = \lambda \frac{dT_h}{dt} + 2\mu T_h \qquad (8')$$
$$(h=1, 2, \ldots, k)$$

egyenletet szolgáltat. E (8') egyenletrendszerből kifolyólag pedig csak két eshetőség áll ellőttünk nyitva; vagy

$$\lambda = \mu = 0, \qquad a)$$

vagy pedig az

$$\frac{1}{T_h} \frac{dT_h}{dt}$$
$$(h=1, 2, \ldots, k)$$

viszonyok értékei függetlenek a h indextől, azaz c_h-val állandókat jelölvén

$$T_h = c_h T. \qquad b)$$

Az $a)$ eshetőségnek a Lagrange egyenletek jellemezte mozgás felel meg; a $b)$ eshetőségnek pedig a tantételben kimondott nagyon speciális mozgás.

Vegyünk hát fel egy *alaprendszert*, mely álljon két pontból, melyek mindegyike másik adott fix vonalon külön-külön állandó összes energiával mozogván, az eleven erejük viszonya sem állandó. Ez alaprendszer mozgása teljesen ismeretes, csak a fix vonalaktól eredő kényszererőket nem adja meg az Ostwald elve a 4.-beli fogalmazásban.* Legyen már mostan adva egy konzervativ pontrendszer, melynek szabadságfoka $\gtreqless 1$; feladatunk a mozgást és a kényszererőket meghatározni. Akkor ez adott pontrendszerhez adjungálva alaprendszerünket, a *kiegészített*

* Ilyen alaprendszerül felvehető például két mathematikai inga, melyek hossza nem egyenlő, vagy melyek hossza egyenlő lévén a legmélyebb helyen különböző sebességgel mennek át; vagy lehet két súlyos pont, a melyek különböző irányú síkokban fekvő körökön mozognak stb.

összes pontrendszer szabadságfoka >2; erre a kiegészített pontrendszerre alkalmazzuk az OSTWALD elvet a 4.-beli fogalmazásban. Akkor az imént bebizonyított tétel értelmében úgy az alaprendszer, mint az adott pontrendszer számára a LAGRANGE mozgási egyenleteit kapjuk első alakjukban; így hát a kényszererők is ismertté válnak.

6. A megengedhető virtuális eltolások OSTWALD-féle korlátozásánál a pontrendszer összes energiája szerepel, továbbá az elv fogalmazásánál fogva csak konzervativ pontrendszerre alkalmazható.

A fogalmazást következőleg általánosíthatni:

Gondoljuk az anyagi pontrendszert kezdeti helyzetében kezdeti sebességeivel adva; akkor a pont mozgása elvileg továbbra is teljesen meghatározott lévén, a T és U elvileg az időnek teljesen meghatározott egyértékű függvényei. Jelölve α-val egy tetszés szerint választott fix számot és E_α-val a $T-\alpha U$ energiát, az E_α is egy a kezdeti helyzet és a kezdeti sebességek által teljesen meghatározott függvény lesz; e függvény jelöltessék $Z(t)$-vel és ez a

$$T-\alpha U = Z(t)$$

lépjen a 3.-beli (2') egyenlet helyébe. Akkor a virtuális eltolások korlátozásául az szolgáljon, hogy $\delta t = 0$ mellett az imént felirt egyenlet a variált mozgásban is érvényes legyen; a korlátozó egyenlet tehát most

$$\delta(T-\alpha U) = 0, \tag{10}$$

hol az U az időt is tartalmazhatja explicite.

A követelés pedig, melyet a pontrendszer mozgási egyenleteire nézve felállitok abban áll, hogy e korlátozásnak (a homogén és szükséges egyenletek mellett) eleget tevő összes virtuális eltolásokat tekintve $\delta U = 0$ legyen.

E követelésnek ismét csak a (7) egyenletrendszer tesz eleget, hol az F_j az időtől is függhet explicit módon. De ezekben úgy a λ, mint a μ időfüggvények, a melyek meghatározására a probléma adataiban semmi támpont sincs. A (7) rendszer tehát

9*

csak schéma, melynek kitöltése tapasztalati tényeknek van fentartva.

De megint az ú. n. természetes mozgást kapjuk, ha az adott anyagi pontrendszerhez az előbb értelmezett alaprendszert adjungálva, a virtuális eltolásokat (10) helyett a

$$\delta\left(T+T_0-\alpha(U+U_0)\right)=0 \qquad (10')$$

variácziós egyenlettel korlátozzuk, hol T_0 és U_0 az alaprendszerre vonatkoznak; továbbá azt a követelést állítjuk fel, hogy az így korlátozott virtuális eltolások rendszerében $\delta(U+U_0)=0$ legyen.

7. Az α szám az előző 6.-ban tetszésszerint volt választható; válaszszuk zérusnak, tehát tegyük $\alpha=0$. Elejtve még az erőkre vonatkozó azt a korlátozást, hogy potencziáljuk legyen, továbbá elejtve a kényszerekre vonatkozó azt a feltevést is, hogy a koordináták és az idő között fennálló egyenletekkel kifejezhetők legyenek, jelöljük

$$\underset{(i=1,2,3;\ldots;3n-2,3n-1,3n)}{Q_i}$$

betűkkel az erőket és

$$\underset{(j=1,2,\ldots,\nu)}{F_j \lesseqgtr 0} \qquad (21)$$

-sal a kényszervonatkozásokat; az alaprendszer pedig ugyanaz legyen, mint 5. és 6.-ban.

E megállapodások után a következő elv mondható ki:

Egészítsük ki az adott anyagi pontrendszert alaprendszerünkkel; korlátozzuk a kiegészített rendszer virtuális eltolásait, közöttük a mozgás tartamában fennálló, homogén egyenletekkel, melyek a

$$\delta(T+T_0)=0 \qquad (10^*)$$

variácziós egyenlet kielégítésére szükségesek; végül követeljük, hogy a korlátozásnak megfelelő virtuális eltolások rendszerében

$$\sum_{i=1}^{3n} Q_i\delta q_i+\delta U \lesseqgtr 0 \qquad (12^*)$$

legyen.

A követelést csak úgy elégíthetni ki, ha az anyagi pontrendszer mozgásegyenletei a Lagrange-félék az első alakban, melyekben az F_j vonatkozásokhoz tartozó λ_j szorzók valamenynyien nem negativok.

A (21) alatti vonatkozások közül bármelyik t időben csak azok jönnek tekintetbe, a melyekre nézve ebben az időben $F_j=0$ és egyszersmind $\frac{dF_j}{dt}=0$*; azért bármely t időben is az itt tekintetbe jövő F_j vonatkozások száma $\leqq 3n-1$.

Az alaprendszer két anyagi pontjának koordinátái legyenek

$$q_{0k}; \quad (k=1,\ldots,6)$$

a kényszeregyenletek, melyeknek e pontok eleget tesznek

$$F_{0l}=0; \quad (l=1,\ldots,4) \tag{11'}$$

ugyanis az alaprendszer szabadságfoka $=2$.

A (10) variácziós egyenlet a 3.-beli fejtegetések értelmében ezzel az egyenletrendszerrel æquivalens:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma m_i q_i'\delta q_i + \Sigma m_{0k} q_{0k}'\delta q_{0k} &= 0,\\ \Sigma m_i q_i''\delta q_i + \Sigma m_{0k} q_{0k}''\delta q_{0k} &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{10**}$$

Az egészen önkényszerű koordináta-variácziók száma tehát $\geqq 1$. Ennek az a következménye, hogy az identitás, melyre jövünk, ha a (12*)-ben valamint a (21) vonatkozások variáczióiban is az egyenlőségi jeleket veszszük tekintetbe, a következő egyenletrendszerrel egyenértékű:

$$\frac{\partial U}{\partial q_{0k}} = m_{0k}q_{0k}'' + \lambda m_{0k}q_{0k}'' + \mu m_{0k}q_{0k}' + \sum_{l=1}^{4} \lambda_{0l}\frac{\partial F_{0l}}{\partial q_{0k}}, \quad (k=1,\ldots,6) \tag{13'}$$

$$Q_i = m_i q_i'' + \lambda m_i q_i'' + \mu m_i q_i' + \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial q_i}, \quad (i=1,\ldots,3n) \tag{13''}$$

hol a λ_j-k közül legfölebb $3n-1$ számú különbözik zérustól.

---

* A. Mayer, Berichte der sächs. Ges. d. Wiss. 1899 Bd. 51. S. 224.

A (13′) és (11′) egyenletekből a 5.-ban leirt módon az következik, hogy

$$\lambda = \mu = 0.$$

Ennélfogva a (13′) és (13″) mozgási egyenletek így irandók:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial q_{0k}} &= m_{0k} q_{0k}'' + \sum_{l=1}^{4} \lambda_{0l} \frac{\partial F_{0l}}{\partial q_{0k}}, \\ Q_i &= m_i q_i'' \quad + \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j \frac{\partial F_j}{\partial q_i}. \end{aligned} \tag{13}$$

Még csak az bizonyitható tehát, hogy a λ_j szórzók közül egy se lehet negativ.

Miután mindegyik $\delta F_{0l} = 0$, tehát a (13) rendszerből δq_{0k}, δq_i-kal való szorzás és összeadás révén

$$\sum Q_i \delta q_i + \delta U_0 = \sum m_i q_i'' \delta q_i + \sum m_{0k} q_{0k}'' \delta q_{0k} + \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j \delta F_j, \tag{14}$$

tehát a (10**) folytán

$$\sum Q_i \delta q_i + \delta U_0 = \sum_{j=1}^{\nu} \lambda_j \delta F_j. \tag{15}$$

Tegyünk ez egyenlet jobb oldalán δF_{j_1} helyett <0 és a többi δF_j helyett zérus értéket, a mi a szabadságfokokra és szabadságmodokra vonatkozó megállapodásokkal megfér; akkor az egyenlet bal oldala a (12*) követelés értelmében $\overline{\gtrless} 0$. A (15) egyenlet a nevezett helyettesítéssel

$$\sum Q_i \delta q_i + \delta U_0 = \lambda_{j_1} \delta F_{j_1}$$

egyenletbe menvén át, kimondhatjuk, hogy

$$\lambda_{j_1} \overline{\geqq} 0.$$

A λ_j Mayer A. fennidézett helyen előadott módszerével számitható ki.

Megjegyzés. A bebizonyitott egyenlőtlenségi elv az $a \neq 0$ esetre is kiterjeszthető, hacsak $1 + a \neq 0$. Ugyanis a (10*) variácziós egyenlet helyébe a (10′) lép, ha az erőknek potencziáljuk van; ha pedig nincs potencziáljuk, akkor a korlátozó variácziós egyenlet ez:

$$\delta(T+T_0)-\alpha(\sum_{i=1}^{3n} Q_i\delta q_i+\delta U_0)=0. \tag{10''}$$

A (12*) követelés helyébe pedig ez lép:

$$(1+\alpha)(\sum_{i=1}^{3n} Q_i\delta q_i+\delta U_0)\overline{\leq}0. \tag{12''}$$

A bizonyítás csak abban különbözik az imént előadottól, hogy a (10**)-beli második egyenlet helyébe ez lép:

$$\sum m_i q_i''\delta q_i+\sum m_{0k}q_{0k}''\delta q_{0k}-\alpha(\sum Q_i\delta q_i+\delta U_0)=0.$$

Ez okból a most is érvényes (14) egyenletből a (15) helyett az következik, hogy

$$(1+\alpha)(\sum_{i=1}^{3n} Q_i\delta q_i+\delta U_0)=\sum_{j=1}^{\nu}\lambda_j\delta F_j.$$

Az előbb előadott úton a (12'') követelés folyományakép most is $\lambda_j\overline{\geq}0$ ered.

8. Legyen megengedve azt a megjegyzést tennem, hogy az alaprendszer behozatalának az iméntiekben használt módszere általánositásra képes, hogy például némely más mechanikai variáczióelvet is lehet segélyével általánosabbá és néha egyszersmind egyszerűbbé tenni, névszerint oly variáczióelveket, a melyeknél időpontra vonatkozó mechanikai kifejezés szélső értéke adott mellékfeltételek mellett követeltetik.

Társulatunk alelnökének Kőnig Gyula úrnak egyik elvén, az *energéma*-elven akarom ez alkalmazást részletezni. Ez elv * két részből áll:

Az első rész azt a törvényt állapitja meg, a mely szerint a

$$\sum_{i=1}^{3n} Q_i q_i''$$

* M. T. A. Ért. a Math. Tud. köréből. XIV. kötet, 1. sz. 1888.

összeg, a szabad erők gyorsulási viriálja, az adott összeköttetésekből, az adott erőkből és tömegekből kiszámítandó. Ez a törvény a legáltalánosabb esetben nagyon bonyolódott, míg szabad pontrendszer esetén egyszerű; névszerint egy tömegpont esetén az eddigi jelölések megtartásával

$$\sum_{k=1}^{3} Q_{0k} q''_{0k} = \frac{1}{m_0} \sum_{k=1}^{3} Q_{0k}^2. \tag{16}$$

Kőnig szóban levő elvének a második része azt mondja, hogy adott helyzet, sebességek és adott szabad erők esetén a pontrendszer az összes lehető és egyszersmind az előbbi törvénynyel megférők közül épen azt a gyorsulásrendszert veszi fel, a mely mellett az

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} m_i q_i''^2$$

gyorsulási energia értéke a legkisebb.

Ha alaprendszerül legegyszerűbben egy szabad anyagi pontot veszünk fel, a melyre például csak a nehézségerő hat, és ha erre az anyagi pontra nézve a (16) egyenletet érvényesnek fogadjuk el, akkor az elv a következő egyszerűbb alakot ölti fel:

Az összes lehetséges gyorsulások közül, a melyek mellett az alapponttal kiegészített anyagi rendszer gyorsulási viriálja adott szabad erők esetén (eleve ismeretlen, de) egyugyanaz értéket veszi fel, azok jönnek létre, a mleyek mellett a kiegészített anyagi rendszer gyorsulási energiája a lehető legkisebb.

Míg Kőnig elve, miként a fentidézett helyen maga kiemelé, felmondja a szolgálatot olyan anyagi rendszer esetén, melynek szabadságfoka $=1$, addig a megváltoztatott alak ebben az esetben is épúgy meghatározza a mozgást és az összeköttetésektől eredő kényszererőket, mint más esetekben. Míg ugyanazon oknál fogva Kőnig elve egyenlőtlenségekkel kifejezett kényszerek esetén nem határozza meg a természetes mozgást, mihelyt a kényszeregyenlőtlenségek száma $\geqq 3n-1$, minélfogva a Gauss elvével nem egyenértékű, addig a megváltoztatott alakról ez nem állítható.

Az elv igazolása könnyen és ép úgy történik, mint Kőnig elvéé.

Végűl ide iktatom Kőnig elvének a saját fogalmazásától legkevésbbé eltérő azt az alakját, a melyben a Gauss elvével teljesen egyenértékűvé válik:

Az összes lehetséges gyorsulások közűl, a melyek mellett a pontrendszer gyorsulási viriálja adott szabad erők esetén nagyobb lenne mint a gyorsulási viriál tételével meghatározott a mozgásban valóban felveendő értéke, azok jönnek létre, a melyek mellett a pontrendszer gyorsulási energiája a lehető legkisebb.

Összefoglalás. A czikk első részében az Ostwald-féle elvnek egy olyan fogalmazását adtam, a mely a dinamikában a D'Alembert-féle mx'', my'', mz'' erők mellett ezekkel egyenjogú más dinamikai erőket is enged meg. Miután ezek az erők additivok és értékük $=0$ is lehet, az elv általánosabb a Hamiltonénál, de a Newton dinamikai elveivel nincs ellenmondásban. A czikk második részében pedig megmutattam, hogy ez a fogalmazás egy általános természetű eljárás alkalmazásával olyan alakot ölt, a mely mellett a Lagrange-Fourier elvvel teljesen egyenértékű.

Réthy Mór.

AZ EGYIPTOMIAK MATHEMATIKAI ÉS ASTRONOMIAI ISMERETEI.

(Második és befejező közlemény.)

Oly népnek, a melynek anyagi jóléte a föld évi termésétől függött, már korán kellett arra a meggyőződésre jutnia, hogy semmi esetre sem mindegy, hogy mily időben kell a vetésnek és aratásnak történnie. Egyiptomban ennek tudata annál erősebben érvényesült, mert ott a Nilusnak periodikusan ismétlődő áradása volt az egyedüli természeti jelenség, a mely a földet a termékenységre szükséges nedvességgel ellátta. A nilusi áradás idejét kellett tehát pontosan meghatározni. Egyiptom felhőtlen, tiszta ege alatt azonban nem volt nehéz észrevenni azt, hogy a Nilus áradásának beálltával bizonyos csillagzatok keleten megjelennek és ismét mások nyugaton letünnek. Ily körülmények között az egyiptomiak lassankint hozzászoktak az égboltozat pontos megfigyeléséhez, összegyüjtötték ama törvényeket, a melyek szerint a nagyobb égi testek mozognak és az égen helyüket változtatják, és így megszerezték az astronomiai tudomány alapját képező ismereteket, a melyek valószinüleg sokkal előbb jutottak tudomásukra, mint a különböző mathematikai fogalmak. És tényleg már a legrégibb időből fenmaradt emlékeken találkozunk — igaz ugyan, hogy csak allegorikus ábrázolás czéljából — csillagászati kapcsolatokkal. Ebben a tekintetben fontosak azok a csillagászati vonatkozások, a melyek a VI. dynastiából (Kr. e. 3. évezredből) való *Mer-en-ra* királynak *Cha-nofer* nevű pyramisán előfordulnak, mert fényt derítenek ez őskornak ismereteire:

«Őrizve van, ki kilép az Orionból,
Őrizve Osiris, ki kilép az Orionból,
A szüret urából, a szép Uag ünnepén.
Megszólalt anyja és örökös támadt,
Megszólalt atyja, megfogant az ég
És megszületett a hajnalcsillag.
Oh! Horus Merenra, téged
És az Oriont viselte az ég; megszületett
A hajnalcsillag az Orionnal. Itt felkel az egyik,
Ott felkel a másik, az istenek parancsa szerint.
Felkeltél és megjelentél az Orionnal
Az égnek keleti oldalán. Nyugvásod
Úgy mint az Orioné, nyugati oldalán az
Égnek. Ti hárman vagytok itt, a hol a Sothis-csillag van,
Melynek helyei szentek és mely benneteket elkisér
Jó úton az égen, Aaru mezejére.»

Titokszerűsége daczára e történet csillagászati magva minden nehézség nélkül kihüvelyezhető. A csillagoknak egy bizonyos constellatiójáról tudósitanak bennünket, a mely az Uag-ünnepen állt be. Ezen a napon ugyanis az Orion és a hajnalcsillag egyidejűleg keltek fel keleten és tüntek le nyugaton. A harmadik csillag, a mely szintén az Orionnal egy időben lett láthatóvá a keleti égboltozaton, a Horus volt, a melynek nevével Merenra király is szerepel. Mer-en-ra jelentése: «Rá-nak kedvencze» és így Horus is, mint Ra fia, szintén «Mer-en-ra» lehetett. Horus azonban a régi egyiptomiak csillagászatában mint a Mars bolygó képviselője szerepelt; ennek neve az ó-egyiptomi felirat alapján Hor-ḫuti, azaz fénylő Horus. A görög-római korszakban Hor-tešr, azaz vörös Horus név alatt volt ismeretes. Mars, Venus (mint hajnalcsillag) és Orion tehát az Uag-ünnep alkalmával a keleti égboltozaton voltak láthatók és mind a hárman ott, a hol a Sothis-csillagzat felkel. Ez utóbbi jelenség természetes, mert az Orion a Sothis állandó kiserője és már a legrégibb feliratokon mint ilyen szerepel. A régi egyiptomiak felfogása szerint Orion királynak alakjában bárkázott az ég oczeánján és őt követte szintén bárkában ülve az isteni Sothis. Igy tehát magától érthető, hogy ama csillagok, a melyek az Orionnal egy időben keleten kelnek fel, ugyanott jelennek meg az égboltozaton, a hol a Sothis-csillagzat látható. Miután ennek daczára ezt külön kiemelik, feltételeznünk kell azt, hogy a Sothis heliákus felkeltének megfigyelése abban az időben már annyira általános volt, hogy a szövegben említett constellatió idejének és helyének közelebbről való megismertetésére szükséges volt azt a Sothis állásával kapcsolatba hozni. Hogy a Sothisnak tényleg heliákus és nem más felkeltével van dolgunk, a szöveg közelebbi áttanulmányozásából tudjuk meg. Ott olvassuk a következőket: «Megszületett a hajnalcsillag az Orionnal. Itt felkel az egyik, ott felkel a másik, az istenek parancsa szerint.» Ebből nyilvánvaló, hogy mind a kettő egy időben felkelve jelentek meg az égboltozaton, és pedig, a mint a szöveg tovább mondja, ott «a hol a Sothis áll». Tehát a Mars, Venus és Orion csillagok constellatiójáról van szó, a mely a Sothis heliakus felkeltének idejébe esett. Ez pedig az Uag-ünnep napján történt, a mely az egyiptomi naptár szerint Thoth hó 18-ára esett. A közép birodalom idejéből (a Kr. e. 2. évezred első feléből) való *Siut*-i sziklasírokban Golenischeff* harmincz évvel ezelőtt néhány fölötte érdekes feliratra bukkant. Brugsch, Mariette, Rougé és Dümichen ezeket több, munkájukat gátló nehézség daczára lemásolták és Erman tudományosan feldolgozta.** E feliratok szerződések, a melyeket *Hpdfʾi* Apuat isten Siuti főprófétája, ez isten templomának órapapjaival kötött, és a melyek különösen azért birnak reánk nézve fontossággal, mert az Uag-ünnep datumát, Thoth havának 18. napját több helyütt említik. Ezt figyelembe véve, Mer-en-ra király a Cha-nofer pyramison levő fent említett felirata szerfölött nagy fontossággal bir a régi birodalom királyainak chronologiájára. Tudjuk tudniillik, hogy a pyramis feliratában említett constellatio az egyiptomi naptár Thoth havának 18. napján történt. Minthogy pedig ezt a Sirius heliakus felkeltével hozták kapcsolatba, kiinduló pontot nyerünk a VI. dynastia királyai

* Recueil de travaux relatifs à la philologie et l'archéologie egyptiennes et assyriennes. Vol. III. liv. 1.

** Zeitschrift für ægypt. Sprache 1882, pg. 159—184.

uralkodási idejének körülbelül való meghatározására. A Sothis-korszak kezdete, a melyet itt figyelembe kell vennünk, a Kr. e. 2776-ik esztendőbe esik; azaz a Kr. e. 2776-ik esztendőben a Sirius heliakus felkelte Thoth havának 1. napjára esett. Ha tehát a Merenra király pyramisának sírfalait diszítő hieroglyph-feliratokon levő csillagászati czélzásokra vonatkozó magyarázatunk helyes és tényleg oly astronomiai elemekkel van dolgunk, a melyek számbeli reconstructio alapjául szolgálhatnak, akkor váratlanul sikerült a régi birodalom királyai chronologiájához kiinduló pontot találni. Az astronomiai szövegek a jelen esetben oly constellatióra vonatkoznak, a mely a Kr. e. 2700. évben történt.

És már ebben a homályos ősidőben rendelkeztek a régi egyiptomiak elegendő astronomiai ismeretekkel, a melyek segítségével tapasztalataikat törvények alakjába önthették és ezeket systematikus módon rendezhették. Ismerték az egyes bolygókat valamint pályájukat, és a következő nevekkel jelölték:

1. Jupiter: Ḥor-up-šeta = a dél csillaga.
2. Saturnus: Ka-en-pet = az égi bika.
3. Mars:
   Ḥor-ḥuti = fénylő Horus;
   Hor-tešr = a vörös Horus.
4. Mercur: Sebgu vagy Sebek = Set csillaga.
5. Venus:
   Seb-ud̲a-Asar = Osiris bolygó csillaga;
   Seb-ud̲a-Bennu = Bennu bolygó csillaga;
   Neter-dua = A hajnal istene;
   Seb-dua = A hajnali csillag.

Azonkivül, mint a régebbi feliratokból kitünik, ezek egyes isteneknek is voltak szentelve és pedig: Jupiter *Osiris*-nek, Saturnus *Horus*-nak, Mars *Ra*-nak, Mercur *Set*-nek és Venus *Isis* istennőnek.

Astronomiai tantételeik külön munkákat is alkottak, a melyek — sajnos — mind elvesztek és csak egynehánynak, a Ptolomeusok idejéből való szövegekben előforduló czíme maradt reánk, a milyen: «A két fény, Nap és Hold, periodikus mozgásának tudományáról» ; «a csillagok periodikus mozgásának törvényéről» ; «a napkorong conjunctiójáról szóló fontos könyvek» ; «az astronomiai égi tábla» stb. Úgy látszik, hogy külön papi collegium is létezett, a melynek feladata volt az astronomiával való foglalkozás és az időszámítás megállapítása. Tagjai a «*Rech sešem en pet* = *az égi rendszer ismerői* voltak és főnökük «a Nap főpapja» név alatt szerepel. Hires collegiumok voltak a *heliopolisi* (a hol Plato és Eudoxos is hosszabb időn keresztül tanultak), a *hermonthisi* és a *Tell-el-amarna-i*.

Már a pyramisok feliratai megkülönböztetik az égen a keleti és nyugati, valamint az északi és déli részt. A Nap pályáját a «*deben*» szóval jelölték, a mely annyit jelent, mint «körülkeringni» ; a Holdét pedig a *hons* szóval, a melynek jelentése «átfutni», a miért a Holdat *Honsu*-nak, azaz «*futó*»-nak nevezték. Az összes csillagokat pedig az égen elfoglalt helyükhez mérten két nagy csoportba osztották, a melyeknek egyike az ég északi részének csillagait *(Íḫmw-sk)* foglalta magában, másika pedig az ég déli részének csillagait *(Íḫmw-wrd)*. Az egész égboltozat hordozója *Nut* istennő, a mely az égboltozatot akképen fogja körül, hogy lábának újjhegyei a láthatár keleti végét, kezének újjhegyei pedig a nyugati végét érintik. Megkülönböztették továbbá az ég ama táját, a hol a Nap nappal tartózkodik attól, a hol éjjel időzik ; az előbbit «*ḥst*»-nek azaz «*felső égboltozat*»-nak, az utóbbit pedig «*duat*»-nak azaz «*alsó égboltozat*»-nak vagy a «*sírok világának*» nevezték. A Nap vagy bármiféle más csillag felkeltét a «*ms-t*» azaz a «*születés*» szóval jelölték ; ezenkívül azonban e jelenség megnevezésére még a «*pr*» = a «*fellépés*» szót is használták. Az egyes feliratok a Nap felkeltét a következő szavakkal írják le : «Az alsó égboltozatból való kilépés, a felső légkörbe való felszállás, a belépés az ég keleti részén levő kapuba, az égboltozat két kapujának nyilásánál levő fény».

Minthogy az egyiptombeliek az elvont fogalmak megszemélyesitését fölötte szerették és azokat konkrét tárgyakkal igyekezték ábrázolni, a Nap is, a különböző napi szakokban az égboltozaton elfoglalt állásához mérten, sajátságos symbolumokat és ennek megfelelőleg elnevezéseket nyert. Igy hajnalkor a Napot «*nhn*»-nek, azaz «gyermek»-nek nevezték, délben «*hwn*»-nek, azaz «férfi»-nak, este pedig «*nhh wêr*»-nek azaz «*vén*»-nek. Ezeket az elnevezéseket a Nap évi pályafutására is alkalmazták. A téli solstitium idején a napot «*gyermek*»-nek, a tavaszi æquinoctiumkor «*ifjú*»-nak, a nyári solstitium idején «*nagy Nap*»-nak, az őszi æquinoctiumkor pedig «vén»-nek nevezték.

Minthogy az egyiptomiak különösen reggel és este figyelték meg az eget, nemsokára észrevették, hogy mindig más és más csillagzatok azok, a melyek reggel heliakusan fel- és este heliakusan letünnek. Ezeket kisérték figyelemmel és nemsokára ama tizenkét csillagzatot ismerték fel, a melyeket mi nevükből kifolyólag *állatöv*-nek nevezünk. Általánosan elterjedt, téves felfogás az, hogy az egyiptomiak az állatöv képeit meglehetősen késön a görögök közvetitésével a babyloniaktól vették volna át. Már az a puszta tény, hogy ezeknek a csillagzatoknak állatnevük van, a mellett szól, hogy ez ekliptikális csillagöv hazáját Egyiptomban kell keresnünk. Ott Ra isten volt az, a kit a Nap symbolisált; a Hold Osirisnek volt szentelve. Az astronomiai és mythologiai szövegek egyikében a következőket olvassuk: Az ég ünnepi mámorban úszik, mert a teli hold alakját vette fel. Az istenek szellemei ábrázolódnak benne és Osiris mint holdisten megnyilatkozik. Másutt meg azt olvassuk: «Osiris isten nagyszerű szelleme havonta megifjodik, hogy birtokába vegye a teli holdat». Hasonlítsuk most össze ezeket a szövegeket a következővel: «Élet és megelevenülés örökké előfordul; a Hold régi helyére tér vissza, és a teli hold szeme pompásságával van ellátva». Ebből világosan megérthető, hogy a régi egyptomiak nem úgy mint a görögök az újholdban, hanem a holdtöltében látták a Hold megifjodását és régi helyére való visszatérését. És ha most figyelmünket még arra is kiterjesztjük, hogy az Apis-bikát, az isteni Osirisnak a földön való megszemélyesitőjét, a teli hold napján avatták föl, akkor semmi esetre sem nehéz a Hold és Osiris között levő astronomiai és mythologiai összefüggést megismerni. Osiris volt a teli hold; testének 14 részre való darabolása, melyről a hagyomány mythusokban beszél nekünk, mythologiai symbolisálása a fogyó hold 14 napjának. Az újholddal mindig a szétdarabolt Osiris újjászületését ünnepelték, ki mint teli hold újra megifjodva hatalmának teljében ragyog. Ha az Egyiptomban annyira kifejlődött állatcultust tekintetbe veszszük, egész természetesnek tűnhetik fel előttünk, hogy a különösen szent állatokat az égre helyezték, még pedig oda, a hol a Ra-ban imádott Nap és az Osirisben istenített Hold folytatta pályáját, tehát az «ekliptika» közelében. Valamint a Napnak világító és melegitő erejében Ra-ra és Horusra ismertek, úgy törekedtek aztán a többi istent és ezeknek attributumait is megszemélyesiteni. Igy származott a különböző istenek incarnatiója és manifestatiója, és így keletkezett az egyiptomiaknak híres állatcultusa, midőn egyes állatokat egy isten egyik különös tulajdonságának, vagy magának az istenek incarnatiójának tekintették. Memphisben a «*bikát*» tisztelték. Az elefantinei Chnum és thebai Amon mint hatalmas kosok manifestálódtak; Sechmet «oroszlán» volt, Chepera isten «bogár», Keb istennő «lud» stb. Ezen állatok mint az istenek incarnatiói, az égi isteneknek földi képviselői voltak, és az egyiptomi égi térképen természetesen ott volt a helyük, a hol Ra, a legnagyobb isten a Nap képében trónolt. Különben is — mint ezt már Hommel kiemelte* — valamennyi nép vallásának történetében megtaláljuk azt a jelenséget, hogy ezek eredete a csillagimádásban van. Igy tehát az ekliptika közelében ragyogó csillagokat azon istenek repræsentálóinak tekintették, melyek a Földön bizonyos állatok képében mutatkoznak, más szóval: a Földön állatokban megtestesült istenségeket Egyiptom csillagászati térképén csillagcsoportokkal ábrázolták, még pedig olyan csillagcsoportokkal, melyeknek helye a Ra-t jelképező Nap közelében volt. Igy magyarázható, hogy miért kaptak az ekliptika csillagai túlnyomóan *állatnevet*, s könnyen beláthatjuk, hogy az egyiptomiak, kik már a régi birodalom idejében (Kr. e. IV. évezredben) ismerték a Nap és Hold pályáját és egyes

* Der Gestirndienst der alten Araber und die altisraelitische Überlieferung. München 1901.

csillagcsoportokat, különös figyelemmel észleltek, sőt még a tropikus év hosszúságát is meg tudták határozni az ú. n. sirius-év alakjában; az ekliptikát és annak «állatövnek» nevezett csillagcsoportjait is ismerték legalább már a VI. dynastia idejében, tehát a Kr. e. III. évezred első felében. Emblemáik a XIX. és XX. dynastia korából (Kr. e. 14. és 13. századból) való thebai királysíroknak ránk maradt csillagászati ábrázolásaiban egész világosan állanak előttünk. Egy ilyen XX. dynastia korabeli ábrán Horust látjuk, a mint egy kötelet húz. Ez a kötél az égi æquator képes jele. Valamint az éggömböt az æquator egy északi és déli félre osztja, úgy a kötél is két részre osztja Egyiptom égi térképét. Ehhez járul még az a körülmény is, hogy Egyiptom régi térképe Egyiptom földjének is hű mása akar lenni. Már pedig Egyiptom történetének legrégibb idejétől fogva két részre oszlott, a mely körülmény még a király czímében is kifejezésre jutott, és így egének térképét is egy északi s egy déli részre akarták osztani. Ha a Nap az æquatort eléri, ha tehát a tavaszi pontba jut, Horus, az új nap veszi át a mindenség uralmát. Mikor tehát Horus az ég kötelét megragadja, a Napnak a déli sphærából az északiba való jutását, tehát a Napnak a tavaszi æquinoctiumba való belépését akarták képletesen ábrázolni. Ezután a *bikát* látjuk, majd az *oroszlánt* s fölötte egy női alakot, alatta a skorpió képét; látunk továbbá egy férfi alakot, mely egy szörnynyel küzd, kétségkívül a vadászt vagy a nyilast ábrázolja. A másik oldalon látjuk az álló vizilovat, mely bizonyára azon csoportot ábrázolja, melyet a mai zodiacus a «*vízöntő*» névvel jelöl; hozzá támaszkodik a krokodilus, a halhoz hasonlóan uszó nilusi szörnyeteg, bizonyára annak symboluma, melyet ma «*Halak*»-nak nevezünk. Bika és a nyilas között valami «Mérleg»-formát látunk; a bika képe fölött van a «*Kettős trónus*», mely mint hieroglyph, számos feliraton a «coincidentiák ünnepét» is jelöli, tehát bizonyára az «*ikrek*»-et akarja ábrázolni. A bika és oroszlán között van a karvaly. Összesen tehát tizenkét képünk van: 1. Horus, a mint a kötelet kifeszíti; 2. Bika; 3. Kettőstrón; 4. Karvaly; 5. Oroszlán; 6. Szűz; 7. Mérleg; 8. Skorpió; 9. Nyilas; 10. Vizes korsó; 11. Viziló; 12. Krokodilus. Ezek közül hat kép t. i. Bika, Oroszlán, Szűz, Skorpió, Nyilas, Vízöntő minden kétséget kizáró módon van feltüntetve; a Kettőstrónust és a Mérleget is — a nélkül, hogy a mythusnak vagy talányoknak terére lépnénk — valódi jelentésükben felismerhetjük. Ha pedig meggondoljuk, milyen szerepe volt Horusnak az egyiptomi vallásban és mythologiában, s ha a Krokodilust annak tekintjük, a minek a «*halakat*» a folyókban gazdag vidékeken, bizonyára beláthatjuk, hogy ezen képek nem valami allegoriát, hanem csak az állatövnek a maguk realizálásában felfogott képeit ábrázolják. Ezenkívül a képek conturjai olyan élesek, mint sehol a babyloniai állatövábrázolásokban. Ugyanolyan éles ábrázolást látunk még egy másik, ugyanazon sírkamrából való képen is, csakhogy itt a bika felett a kettős trónus és az oroszlán előtt a Karvaly hiányzik. Nem kevésbbé világos azon csoport is, mely I. Seti király thebai sírjában van ábrázolva, csakhogy itt a Skorpió és a Kettőstrónus hiányzanak, és helyettük más motivumokat vettek fel. Mindenekelőtt azon edény helyén, mely fölé a viziló megszemélyesítette Vízöntő balkarját nyujtja, egy sajátságos kardalakot találunk, mely, a mint látszik, a bika csillagképével egy keskeny szalaggal van összekötve. Ez valószinüleg a *tejút* képe, mely az ikrek csillagzatától kezdve keletfelé huzódik. Ez azonban a Kr. e. XIV. században a Bikától indult el, hogy délen a Bakban újra messe az ekliptikát. Az a férfi alak pedig, mely kezével a szalag után kap, bizonyára a kocsis, melynek csillagképe a Bikáé mögött a tejút másik oldalán fekszik. Tehát látjuk, hogy már a XIX. és XX. dynastia idejében (Kr. e. 14. és 13. században) az állatöv csillagzatait a ránk maradt emlékeken nagyrészt olyan képek jelölik, melyek rájuk nézve még ma is jellemzők; az ábrázolás pedig olyan markáns és olyan érthető, hogy semmi kivánni valónk nincs e tekintetben. Igaz ugyan, hogy kifogásolhatjuk azt, hogy az egyiptomiak, a kiknek őshazája semmi esetre sem Afrika, hanem Ázsia, az állatöv elemeit a babyloniaktól vették át és azokat idővel, épen úgy mint a többi Ázsiából hozott kulturelemeket, az új viszonyokhoz alkalmazták. Annyi azonban minden esetre bizonyos, hogy téves ama sűrün hangoztatott feltevés, a mely szerint az egyiptomiak a régi időben a zodiakust nem ismerték, hanem csak a görög-római korszakban a görögöktől vették volna át. Már a XIV. századból való királyok sírfeliratain oly elemek fordulnak elő, melyekből bátran következtethetünk az állatöv képeinek pontos ismerésére.

De úgynevezett dekancsillagzataik is voltak. A mint az évük országuk physiognomiai viszonyaihoz képest három részre oszlott: az áradás, vetés és szárazság idejére, épen úgy a hónapot is már a legrégibb időktől fogva három részre az úgynevezett dekadokra vagyis tíznapos időrészekre osztották. Egy-egy ilyen dekad 1. napján heliákusan felkelő csillagokat megfigyelték és ezeket az egyes dekadok uralkodóinak és ábrázolóinak tekintették. A feliratokon különböző nevekkel szerepelnek. Leginkább a «sibu» = «csillagok» szóval jelölték. A Ramesseum (II. Ramses temploma) felirataiban mint *sibu šepesu* «diszcsillagok» fordulnak elő; más szövegekben «védőcsillagoknak», «isteni csillagoknak» is neveztetnek.

Legrégibb évformájuk 12 harmincznapos hónapjainak megfelelőleg harminczhat ily dekánt ismertek. A midőn pedig észrevették, hogy 360 napból álló évük nem felel meg a valóságnak, 12 harmincznapos hónapjaikhoz még 5 kiegészítő napot (Epagomenai) kellett kapcsolniok s így természetes volt, hogy ama dekancsillagzatok, a melyek az egyik évben minden hó 1-én, 11-én és 21-én lettek láthatókká, a következő évben csak a hó 6-án, 16-án és 26-án tüntek fel, a harmadik évben pedig ismét a hónap 1., 11. és 21. napján jelentek meg és így a hozzákapcsolt öt kiegészítő nap folytán felváltva, az egyik évben a dekadok kezdetén, a következőben pedig a közepén lettek láthatókká.

Ezen dekancsillagzatok vezetője a Sothis csillag volt, a mely ez egyiptomiak úgynevezett szent évének újév napján heliakusan kelt fel és a melylyel a dekancsillagzatok sorozata megkezdődött.

Különböző korszakokból fenmaradt emlékek teljesen egyező tudósitásai szerint ezek a következő csillagcsoportok voltak (az egyiptomi nevek alatt a *Salmasius*-nál említett görög elnevezések vannak feltüntetve):

Folyó szám	A Dékancsillag neve	A csillag heliakus felkelésének dátuma	
		az egyptomi naptár szerint	a Julius-féle naptárban
1.	Sopdet Σωθίς	Thóth 1.	Julius 20.
2.	Šit Σίτ	Thóth 11.	Julius 30.
3.	Knum Κνουμίς	Thóth 21.	Augusztus 9.
4.	Ḫar-knum Χαρκνουμίς	Paophi 1.	Augusztus 19.
5.	Ḥêʿ-dêt ῾Ητήτ	Paophi 11.	Augusztus 29.
6.	Pḥu-dêt Φουτήτ	Paophi 21.	Szeptember 8.
7.	Tôm Τώμ	Athyr 1.	Szeptember 18.
8.	Ueʿštebkot Οὐεστεβκωτί	Athyr 11.	Szeptember 28.
9.	'Aposo-t Ἀφοσό	Athyr 21.	Október 8.
10.	Sobhôs Σουχώς	Choiak 1.	Október 18.
11.	Tpêʿ-ḫont Τπήχόντ	Choiak 11.	Október 28.
12.	Ḫont-har Χοντάρ	Choiak 21.	November 7.
13.	Spt-ḫn Σπτχνέ	Tybi 1.	November 17.
14.	Sešme Σεσμέ	Tybi 11.	November 27.
15.	Si-sešme Σισεσμέ	Tybi 21.	Deczember 7.
16.	Ḥr-êb-wôʿ ῾Ρηουώ	Mechir 1.	Deczember 17.
17.	Sešme Σεσμέ	Mechir 11.	Deczember 27.
18.	Konime Κονίμέ	Mechir 21.	Január 6.
19.	Smat Σμάτ	Phamenoth 1.	Január 16.
20.	Srô'-t Σρώ	Phamenoth 11.	Január 26.
21.	Si-srô't Σισρώ	Phamenoth 21.	Február 5.
22.	Tpêʿ-ḫw Τπτχύ	Pharmuthi 1.	Február 15.

Folyó szám	A Dékancsillag neve	A csillag heliakus felkelésének dátuma	
		az egyptomi naptár szerint	a Julius-féle naptárban
23.	Ḫw *Χύ*	Pharmuthi 11.	Február 25.
24.	Tpêʿ-biu *Τπηβίου*	Pharmuthi 21.	Márczius 7.
25.	Biu *Βίου*	Pachon 1.	Márczius 17.
26.	Ḫont-ḥar *Χονταρέ*	Pachon 11.	Márczius 27.
27.	Tpi-biu *Τπιβίου*	Pachon 21.	Április 6.
28.	Ḫont-har *Χονταρέ*	Payni 1.	Április 16.
29.	Ḫont-ḫre *Χονταχρέ*	Payni 11.	Április 26.
30.	Si-ket *Σικέτ*	Payni 21.	Május 6.
31.	Ḫôu *Χάου*	Epiphi 1.	Május 16.
32.	ʿErô'-t *'Ερῶ*	Epiphi 11.	Május 26.
33.	Remen-ḥare *ʿΡεμενααρέ*	Epiphi 21.	Junius 5.
34.	Tos-ʿolḳ *Θοσόλκ*	Mesori 1.	Junius 15.
35.	Waʿre-t *Οὐάρε*	Mesori 11.	Junius 25.
36.	Pḥu-ḥor *Φουόρ*	Mesori 21.	Julius 5.

Legjobban áttekinthetők e csillagcsoportok IV. Ramses király (uralkodott 1208—1202 Kr. sz. e.) sírjának egyik képén. Látjuk az ég istennőjét, Nuth-ot, a ki az égboltozatot symbolisálja, a melyet a közepén isteni szakállal ékesített alak alátámasztja. A kép keleti oldalán az égboltozat szélén a napkorong látható és fölötte a mulhatatlanság és a természet újjáéledésének symboluma, a szárnyas scarabeus. Itt egyúttal czélzás a tegnap letűnt, tehát az alsó égsphærába költözött, a ma pedig újból felébredt, a felső égsphærába felemelkedett Napra. A nyugati oldalon a leáldozó Napot pillantjuk meg. Az ég istennőjének teste a dekánok nevével van teli írva és a kép többi részeit ezen csillagzatok felkelésének dátumai foglalják el.

VI. és IX. Ramses királyok sírjaiban (a Kr. e. 12. századból) az ég egyes óráinak megfelelő csillagfelkelések vannak feltüntetve, és pedig olyképen, hogy az egyiptomi év minden hónapjának első és tizenhatodik napjára nézve nemcsak az este felkelő csillagzatok vannak megnevezve, hanem azok is, a melyek a 12. éjszaki órában lépnek az ég felső sphærájába. És a mi a legérdekesebb, az itt felemlitett csillagnevek között találunk olyanokat, a melyek még a mi csillagatlaszunkban is foglalnak helyet. Példák erre a következő nevek:

Sibu en saḫ	=	Orion csillaga
Sibu en sopdet	=	Sothis csillaga
Sibui	=	A kettős csillag (Gemini)
Sibu nu mu	=	A vízi csillagok (Hydra)
Maa	=	Az oroszlán (Leo)
Sibu ašu	=	A csillagsokaság (Plejadok) stb.

E mellett megjegyzendő, hogy az egyiptomiak nagyobb csillagcsoportoknál, a melyeket közös név alatt külön csillagképpé egyesítettek, nemcsak az egészet mint ilyet figyelték meg, hanem kiterjesztették figyelmüket annak egyes részeire is. Igy például az oroszlán csillagképénél «az oroszlán fejét» (tep en maa) és «farkát» (sedef) jegyezték fel. Az «*óriás*» (Neḫet) csillagképénél a következő részek vannak feljegyezve: az óriás tollkoronájának hegye (tpa suti ent Neḫet), az óriás tollkoronája (suti ent Neḫet, az óriás feje (tpa ent Neḫet), nyaka (neḫbetef), tarkója (ḫabutef), nyakszalagja (begasetef), melle (mendetes), térde (agebef), lábszára (seteḫetef), lába (patef) és talpa (sebegef). Az egyes felkelések helyének megfigyelésére egy 104 négyzetből álló hálót tervezték, a mely akképen keletkezett, hogy egy téglalap hosszát 13, szélességét pedig 8 ilyen egységre osztották és az egymással szemközt levő részeket egyenes vonalakkal összekötötték. Ezen hálóba guggoló emberi alakot rajzoltak, a mely arczát a szemlélő felé fordította. A téglalap egyes négyzeteit elválasztó vonalak a bele-rajzolt alak következő nyolcz testrészein haladtak keresztül: 1. a mell közepén, 2. a jobb szemen, 3. a bal szemen, 4. a jobb fülön, 5. a bal fülön, 6. a jobb karon, 7. a bal karon és 8. a bal lábszáron. Ha valamely csillag állását meg kellett jelölni, akkor ezt a háló egyik négyzetébe a megfelelő helyére jegyezték be és melléje magyarázat czéljából a következő, szöveggel egybekapcsolt formulát írták: «x csillag ezen vagy amazon testrészen». Ez a háló a belé rajzolt alakjával azonban más czélt is szolgált. Ha valamely csillagzatnak a délkörön való áthaladását, tehát a csillagzatot a culminatiója idején akarták megfigyelni, akkor a hálót úgy állították fel, hogy középvonala a délkör síkjába essék; és épen úgy mint manap a csillagnak a távcső különböző fonalain való keresztülhaladását figyeljük meg, úgy az egyiptomiak az ég emberének ama testrészeit jelölték meg, a melyekhez a csillagzatot közeledni látták.

*

Magától érthető tény, hogy a Holdat is a legnagyobb figyelemmel kisérték. Különös fontossággal bírt rájuk nézve a valódi conjunctio és oppositio napjának meghatározása. Megfigyelésük tárgya az oppositio volt, mert ettől $14^1/_2$ napot előre számítva, körülbelül az újhold idejét kapták meg. És így minden hónapjuk két részre oszlott: a fogyó hold és a növekedő hold napjaira. A hónap egyes napjainak pedig, a Hold phasisainak megfelelőleg külön elnevezésük volt.

A valódi conjunctio napját «*ḥib-enti-paut*»-nak azaz «az újhold ünnepének», az újhold napját pedig «ḥib-abud»-nak, azaz «a hónap ünnepének» nevezték. A teli hold napjának, tehát a hónap 15. napjának neve «ḥib-en-met-dua» azaz «a tizenöt ünnepe» volt. A teli hold előtti és a teli hold utáni nyolczadik nap azaz a hónap hetedik és huszonharmadik napja a «*ḥib-sena*» azaz «*a szakasz ünnepe*» közös nevét viselte. Épen úgy az újholdat követő, tehát a növekvő hold első napjának és a teli holdat követő, tehát a fogyó hold első napjának közös elnevezése «*ḥib-masper*» volt.

Hogy a Holdat már a legrégibb időktől fogva a legnagyobb figyelemmel kisérték, már az a tény is bizonyítja, hogy sok fontos eseménynél a Hold korát is feljegyezve találjuk.

Sajnos, hogy az egyiptomiak astronomiájára vonatkozólag, a mathematikai ismereteiket tárgyaló Papyrus-Rhindhez vagy az orvostanukat ismertető Papyrus-Ebershez hasonló okmány birtokunkban nincsen. Talán rejtőzködik még a föld mélyében egy-egy ilyen kincs és talán sikerül ezt szerencsés ásatás alkalmából napfényre juttatni! Igaz ugyan, hogy akkor egyik vagy másik állításunk, a melyet manap csak hypothesis alakjába önthetünk, megkapná a kegyelemdöfést, de a végeredmény «több világosság» volna.

Mahler Ede.

AZ ANOMAL DISPERSIO SZEREPE AZ ASTROPHYSIKÁBAN.*

Az anomal dispersio jelenségeinek ismerete izzó gőzöknél újabban két fontos astrophysikai elméletnek szolgált kiinduló pontjául: ezen alapszik W. H. Julius-nak nehány éve kifejtett napelmélete és legújabban ily alapon sikerült H. Ebert-nek az új csillagok spektrumát is igen kielégitő módon magyarázni, mi eddig leküzdhetetlen nehézségekbe ütközött.** Mielőtt az astrophysikai alkalmazásokról szólanék, kivánatosnak tartom az anomal dispersiora vonatkozó főbb kisérleti eredményeket előzőleg röviden ismertetni.

A törésmutató: n mint a hullámhossz: λ függvénye a közönségesebb átlátszó és szintelen törőközegeknél — legalább a látható spektrum határán belül — igen egyszerű menetű: n a hullámhossz növekedő értékeinél állandóan kisebbedik, a nélkül, hogy a változás igy kijelölt körében maximumokat vagy minimumokat mutatna. Ettől eltérőleg több szines anyagnál (pl. kobaltüveg, cyanin-oldat stb.), n nem csökken állandóan, ha λ

---

* Előadatott a Math. és Phys. Társulat 1904 február 18-án tartott rendes ülésén.

** V. ö. H. Becquerel: Compt. Rend. 127. k. II. r. 899—904. l. és 128. k. I. r. 145—151. l.

Julius: Phys. Zeitschr. 2. k. 348—353 l, és 357—360 l.; 3. k. 154—158. l. 4. k. 132—136. l.

R. W. Wood: Phys. Zeitschr. 3. k. 230—233. l.

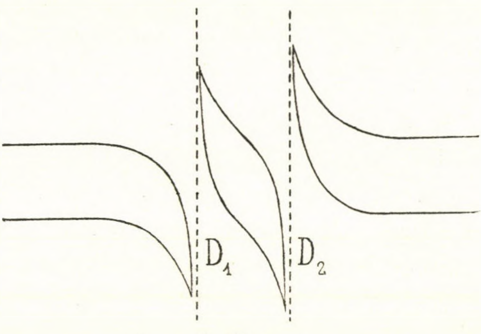
Lummer & Pringsheim: Phys. Zeitschr. 4. k. 430—433. l.

H. Ebert: Phys. Zeitschr. 4. k. 473—476. l. és Astr. Nachr. (164). No. 3917.

Seeliger: Sitzungsberichte d. Akad. der Wiss. zu München 21. k. 239—46. l. és Astr. Nachr. (130.) No. 3118.

növekszik, hanem épen azon hullámhosszaknál, melyek környékén az absorptio jelentékeny, sajátságos menetet mutat. Kisebb λ értékeken át közeledve az absorptio-hely felé, n eleinte kisebbedik, az absorptio-hely előtt minimumát éri el, ezután növekedőbe megy át egész maximumáig, mely az absorptio-helyen túl fekszik, végre ismét csökken. Ezt a jelenséget némely szines törőközegnél először CHRISTIANSEN figyelte meg és anomal dispersionak nevezte. Utána KUNDT foglalkozott vele behatóbban s neki már sikerült kimutatni az anomal dispersiot jódgőznél is, továbbá oly Bunsen-lángban, melyet natriumsóval sárgára festett. Ezen utóbbi fényforrás behatóbb vizsgálata, mint azt először H. BECQUEREL, utána WOOD, JULIUS és mások végezték, sokban gazdagította ezen jelenségre vonatkozó ismereteinket s ezen legújabb eredményeken alapulnak JULIUS és EBERT idézett elméletei is.

A következőkre nézve fontos azon kisérleti módszer ismerete, mely az ilyen közegek anomal dispersiojának vizsgálatát lehetővé tette. Ez a módszer egy, már régen ismert eljáráson: a «keresztezett prizmák» módszerén alapszik, melyet már NEWTON arra használt, hogy két különböző törőközeg dispersiójának menetét összehasonlítsa. Hogy ezen eljárás izzó gőzökre alkalmazható legyen, első feladat volt az ilynemű törőközegeknek prizmaalakot adni, mi BECQUEREL-nek a natriumláng esetében a következő módon sikerült: egy Bunsen-lámpa lángjába keskeny vályúalakra görbített platinalemezt vezetett be élével lefelé, vízszintes helyzetben s ebbe rakta az illető natriumsót. A láng két nyalábra oszlott, melyek mindegyikének belső széle meg volt festve a párolgó só gőzétől s ez a két gőzréteg közel ékalakú lévén, úgy hatott — legalább a platinalemez közvetlen szomszédságában — mintegy olyan prizma, melynek törőéle vízszintes és lefelé van irányítva és törőszöge közelítőleg egyenlő a vályú élszögével. Ezen a lángon egy elektromos ívlámpának egy collimator vízszintes résére vetett fényét bocsátotta keresztül s a lángból kilépő, dispersiot szenvedett sugárnyalábot alkalmas gyűjtőlencsével egy nagyobb dispersiojú spektroskop verticalis résére vetette. Ezen utóbbi készülék prizmájának törőéle függélyes lévén, a lángprizma élével derékszöget képezett; ez magyarázza a módszer elnevezését. A spektroskop látmezejében a spektrum az 1. ábrában feltüntetett sajátságos alakot mutatta: a natrium D_1 és D_2 vonalainak szomszédságában a láng prizmatikus hatása folytán a rendes körülmények között egyenesekkel határolt spektrumszalag szakadásokat mutatott, ugyanis a sáv határvonalai elgörbülvén, az ábrában feltüntetett csúcsokban egyesültek. Ebből az következik, hogy — a kép a távcsőben meg lévén fordítva, — ha balról D_1 felé, tehát a csökkenő λ-k irányában haladunk, a láng a D_1-en inneni sugarakat felfelé, az utána következőket lefelé térítette el s a törésmutató ezen feltünő gyors változása a D_2 vonal környezetében ugyanilyen sorrendben ismétlődött. Itt tehát a natrium két jellemző absorptio-vonala szomszédságában teljesen olyan jelenségek észlelhetők, milyeneket anomal dispersiojú szilárd és cseppfolyós közegek mutatnak. A dispersio hatása Becquerel kisérleteinél a D_1 vonalon innen $3 D_1 D_2$ távolságig, D_2-n túl $4 D_1 D_2$ távolságig mutatkozott s D_2 hatása mintegy kétszer akkora volt, mint D_1-é. Becquerel-nek sikerült a jelenséget megfotografálni s a felvételeken az eltérítéseket lemérvén, a készülék ismert adataiból a törésmutató szélső értékeit kiszámitani. A számításnál a lánggázok közepes törésmutatóját 1.0001-nek véve, n maximumát D_1 előtt 1.0010-nak, minimumát D_2 után 0·99875-nek számította ki, mindkettőt a vacuumra redukálva. Ezen utóbbi számérték azt bizonyítja, hogy a D_2-énél kevéssel kisebb hullámhosszaságú sugarak a natriumlángban gyorsabban terjednek, mint a vacuumban. A törésmutató ilyfajta kivételes viselkedését eddig még csak egyes fémeknél észlelték.



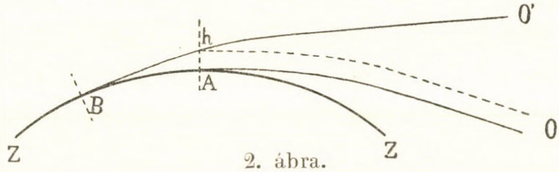
1. ábra.

WOOD ily tárgyú vizsgálatainál más kisérleti berendezést választott, a mennyiben a natriumgőzt hydrogennel töltött csőben állította elő, úgy, hogy itt már a gőztömegnek nem prizmatikus alakja, hanem változó sűrűsége hozta létre a dispersiot. Ily módon sűrűbb gőztömegekkel kisérletezhetett s ezért nála a törésmutató szélső értékei nagyobb különbséget mutatnak, mint BECQUEREL-nél; WOOD ezekre, ismét a vacuumra viszonyitva az: 1.0025 illetőleg 0.9970 értékeket vezette le. Tájékoztatásúl megemlítem, hogy a levegő törésmutatója KETTELER szerint a spektrum ezen részében: 1.000295, miből láthatjuk, hogy n—1 absolut értéke ilyen anomal dispersiojú gőzök esetében egyes hullámhosszaknál sokszorta nagyobb a levegő megfelelő adatánál.

Az anomal dispersio jelenlétét legújabban a natriumgőzön kívül EBERT, LUMMER és PRINGSHEIM még a kalium, lithium, thallium, baryum, strontium és calcium egyes vonalaira is kimutatták s ezen gőzöknél is hasonló viszonyokkal találkoztak, mint a natriumgőz esetében.

JULIUS BECQUEREL eredményeit teljesen igazolva találta, azzal a különbséggel, hogy a D-k környékén fellépő fényes csúcsokat sokkal messzebbre volt képes követni verticalis irányban, mint BECQUEREL s egyúttal azt is tapasztalta, hogy ezek a csúcsok csaknem egészen az absorptio vonalak közepéig (az 1. ábrában pontozott vonalakig) érnek. Ebből azt következteti, hogy a D vonalak nagy szélessége ez esetben nem az absorptioból származik, hanem csak látszólagos, mert a D-k közvetetlen szomszédságában levő hullámhosszak átmennek a lángon, és csak a dispersio következtében nem eshetnek a spektrumszalagba. Ezért ajánlja, hogy minden olyan esetben, midőn széles absorptiovonalakat észlelünk, győződjünk meg előbb arról, hogy nem játszik-e az anomal dispersio némi szerepet a jelenség létrehozásában.

JULIUS a további alkalmazások szempontjából megfigyeléseinek eredményét a következő két tételben foglalja össze: 1) ha egy intenziv, folytonos spektrumot adó fényforrás fénye oly téren halad át, melyet izzó natriumgőz egyenlőtlen sűrűséggel tölt be, akkor az ily gőztömegből kilépő fény azon része, melynek hullámhossza a D vonalakétól kevéssé különbözik, sokkal erősebben fog eredeti irányából eltéríttetni, mint minden más sugár; különösen fokozott mértékben áll ez olyan sugarakra, melyek alig különböztethetők meg a natriumfény saját sugaraitól. Ily viszonyok között tehát úgy látszhatik, hogy az esetleg csak igen csekély emissioképességű natriumgőz igen intenziv, saját sugárzásához nagyon hasonló fényt bocsát ki, holott ezek a sugarak nem magából a kevéssé világitó gőzből, hanem a mögötte fekvő fehér fényforrásból erednek. 2) Ha az ilyen natriumgőzökön átment sugarakat spektroskopiai uton elemezzük, gyakran azt fogjuk tapasztalhatni, hogy a D vonalak igen szélesek



2. ábra.

és sötétek, de ismét csak az anomal dispersio következtében, ugyanis a D-k szomszédságába eső fény annyira kitéríttetett eredeti irányából, hogy egyáltalában nem juthatott a spektroskop résére.

Ezen eredményeket Julius a napprotuberantiák magyarázatára használta; e jelenség eddigi értelmezésénél ezen képződmények rendkivül nagy emelkedési sebessége és radialis sebessége, melyek eddigi nézeteink szerint 300, sőt 500 $\frac{\text{km}}{\text{sec}}$-ot is meghaladhatnak, igen nagy nehézségeket okozott. Legyen Julius nyomán $ZBAZ$ a napfelület átmetszete (vagy, ha a Schmidt-féle napelmélet álláspontjára helyezkedünk az ú. n. kritikus sphæra átmetszete) és álljon az észlelő nagy távolságban O irányban. Egy A-ból az érintő irányában kiinduló sugár, ha a sugártörés normalis, eleinte nagyobb, később kisebb görbületű úton O-ba fog juthatni. Egy B-ből jövő sugár már más irányban fog kilépni a légkörből s pl. a h O' úton fog tovább haladni. Az A

pontot tehát az *O*-ban levő észlelő épen a napkorong szélén fogja látni. Kis egyenlőtlenségek a törésmutatóban alig befolyásolhatják a sugarak útját, a míg a dispersio normális. Ha ellenben *A* fölött egy egyenetlen sűrűségű natriumgőz-tömeget képzelünk, mely egyébként csak kevés fényt bocsát ki, ez a gőztömeg a *B*-ből jövő sugarak útját általában alig fogja módosítani, kivéve a D_1-hez és D_2-höz közel fekvő sugarakét, melyeket igen jelentékenyen elterítheti útjokból. Egy részük ennek folytán a *h O* szakgatott vonallal kijelölt utat fogja követhetni, s ilyformán az *O*-ban levo észlelő *A* fölött csekély magasságban oly, többé-kevésbbé intenziv fényt fog észlelhetni, melynek szine ugyan a natriumfény szinéhez igen hasonló, de azért mégsem a gőztömegből, hanem a fehér fényű photosphæra *B* pontjából veszi eredetét. Ugy a kivételesen nagy, mint a kivételesen kicsiny törésmutatójú sugarak eljuthatnak *B*-ből *O*-ba; az első esetben a gőznek úgy kell hatnia, mint egy oly prizma, melynek törőéle felfelé van fordítva, az utóbbi esetben lefelé. A spektroskopiai vizsgálat természetesen mindig meg fog győzni arról, hogy az így elterített fény, mely a protuberantiát alkotja, nem azonos a natrium fényével, de míg eddig az ily esetekben észlelt hullámhossz-különbségeket mint «vonaleltolódásokat» Doppler elve alapján értelmezték s ily módon a protuberantiákat alkotó gőztömegek valószinütlen nagy radialis sebességére következtettek, addig ez a feltevés a jelen Julius-féle magyarázatnál feleslegessé válik.*

A *D*-kénél nagyobb hullámhosszaságú fény jelenléte a protuberantiákban általában valószinűbb, mert feltételezhető, hogy mechanikai okokból a gőzök sűrűsége általában gyakrabban fog csökkenni, ha a photosphæra felületétől felfelé haladunk, mint

* Tájékoztatásul megjegyzem, hogy a D_1 vonal hullámhossza $\lambda_{D_1}=589.62\ \mu\mu$, D_2-é ennél 0·60 $\mu\mu$-vel kisebb, ez a különbség tehát közel $\frac{\lambda_{D_1}}{1000}$-del lévén egyenlő, ily nagyságú vonaleltolódásnak megfelelő radiális sebesség a fénysebesség ezredrészével volna közel egyenlő, vagyis kerek számban 300 km/sec-dal.

növekedni. Egyúttal az is világos, hogy olyan hullámhosszaságú sugarak, melyek a D-ktől távolabbra esnek, leginkább csak a napszél közvetetlen szomszédságában fognak mutatkozni, mert ez esetben n-nek a közepes értéktől való kis eltérése már elegendő a sugarak irányának ily csekély megváltoztatására. A protuberantiák magasabb pontjaiból jövő sugarak ellenben nagyobb mértékben téríttettek el eredeti irányukból, tehát ez esetben n-nek is jobban kell különböznie közepes értékétől, mint az előbbi esetben, mi csak oly sugarakra áll, melyek már sokkal közelebb fekszenek a D-khez. Ez teljesen megfelel a protuberantiák közönségesen észlelt alakjának; a legtöbb protuberantia ugyanis alul a napszél közelében szélesebb s fokozatosan keskenyedve többnyire csúcsban végződik, miáltal nyílra emlékeztető alakot nyer.

Julius elmélete nem zárja ki a régibb felfogást sem, mely szerint a protuberantiák izzó gőztömegek, melyek saját fényükben világitanak. Julius csak azt akarta ezzel elérni, hogy a protuberantiák magyarázatánál a Doppler-féle elvből folyó nagy sebességek feltevése elkerülhető legyen. A vonaleltolódások ily módon egyszerűen magyarázhatók, de az óriási emelkedési sebességek értelmezése sem okoz nehézséget, mert ezek csak látszólagosak és az absorbeáló közeg sűrűség-változásában lelik magyarázatukat, a nélkül, hogy a protuberantiák méreteinek megfelelő óriási gőztömegek gyors emelkedését kellene feltételeznünk, mint azt az eddigi elméletek követelik.

Julius a chromosphærikus vonalak hosszának és gyakoriságának kérdésével is foglalkozik s mivel ez az ő elmélete szerint nem függ mástól, mint a törésmutató anomal viselkedésétől a gőzök megfelelő vonalainak környékén, ezért egyáltalában nem tartja feltűnőnek, hogy a chromosphærikus vonalaknak sem intenzitása, sem gyakorisága nem felel meg e vonalak viselkedésének, sem az illető anyagok emissiospektrumában, sem a közönséges napspektrumban. A különböző anyagok, melyek jelenlétét a protuberantiákban kimutatták, a Nap légkörének sokkal vastagabb rétegében lehetnek jelen, ha Julius elméletét fogadjuk el, mint az eddigi felfogással összeegyeztethető volt, mert az egyes anyagok gőzei anomal dispersiojuk folytán kimutathatókká válnak még akkor is, ha saját fényük erre nem volna elég intenziv. Nem kivánom a Julius-féle elmélet további, részben a Schmidt-féle napelméletre támaszkodó következtetéseit itt részletezni, csak azt akarom még megemlíteni, hogy az absorptiovonalak gyakran észlelt kiszélesedését napfoltokban Julius szintén az anomal dispersiora vezeti vissza, miként az a 146. lapon mondottakból egyszerűen következik.

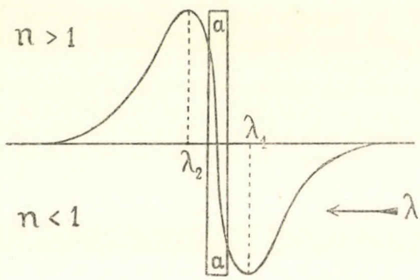
Az anomal dispersio törvényeinek második astrophysikai alkalmazása Ebert-től származik, ki legújabban megkisérlette az új csillagok spektrumában észlelt jelenségeket ily alapon magyarázni, mi eddig az astrophysikusoknak minden fáradozásuk daczára kielégitő módon alig sikerült.

Az eddig spektroskopikusan vizsgált új csillagok szinképében — legalább fényváltozásuk bizonyos szakaszában — fényes emissiovonalakat és sötét absorptiovonalakat észleltek egyidejűleg, melyek ugyanazon anyaghoz látszottak tartozni. A fényes vonalak többnyire igen szélesek voltak és nagy mértékben el voltak tolódva a szinkép vörös vége felé, a sötét vonalak pedig ugyanilyen mértékben, de ellentett irányban. Ezen kettős spektrum értelmezésére eddig általában két égitestet teteleztek fel, melyek egyike a fényes vonalú spektrumot, másika a sötét vonalú spektrumot szolgáltatná, az első nagy sebességgel távolódnék tőlünk, a másik ugyanily rendű sebességgel közelednék felénk. A Doppler-féle elv szerint kiszámitott sebességek példátlan nagyságúak, egyes esetekben 1000 $\frac{\text{km}}{\text{sec}}$-ot is meghaladnak, mi máris nagyon sokat levon ezen magyarázat valószinűségéből, de végképen kizárja ezt a felfogást az a körülmény, hogy az így levezetett sebességek, ha ugyanazon elem különböző vonalaiból vezetjük le azokat, gyakran még előjelben is eltérnek egymástól.

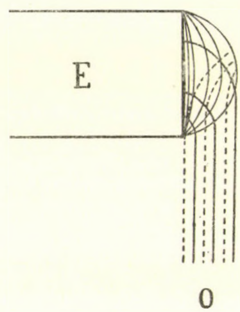
Az első lépést a Novák spektrumának helyesebb magyarázatára Wilsing és utána Hale tették. Wilsing viz alá meritett fémelektródok közt ütetett át szikrákat s arra az érdekes eredményre jutott, hogy az így létrejövő szikraspektrum fényes és sötét vonalakból áll, melyek oly arányban vannak eltolódva, mint az új csillagok spektrumában s a kiszélesedett és elmosódott vonalak általában igen hasonlítanak a Novák vonalaihoz. A vonaleltolódások magyarázatára Humphreys és Mohler kisérleteire hivatkozik, kik azt tapasztalták, hogy nagy nyomás alatt a fémspektrumok vonalai eltolódnak, közel arányosan a nyomással, miből Wilsing azt következtette, hogy a folyadék alatt átütő szikrában levő gőzök igen nagy nyomás alatt állanak. Hale, Lockyer, Konen és más újabb kutatók Wilsing kisérleteit ismételvén, hasonló jelenségeket észleltek, de tekintettel a vonaleltolódások nagyságára, nem fogadták el Wilsing magyarázatát, mert nézetük szerint az elektródokat környező gázburokban alig tételezhetők fel oly nagy nyomások, a milyenek a vonaleltolódások nagysága mellett szükségesek volnának.

Ebert szintén behatóan megvizsgálta ezen jelenséget, többféleképen módosítva az előbb említett kutatók kisérleteit, de ő sem fogadja el Wilsing magyarázatát, hanem az itt fellépő jelenségeket az anomal dispersiora próbálja visszavezetni, minek feltételezése eddigi tapasztalataink szerint fénygőzöknél igen valószínű. Ily módon igen egyszerűen sikerül neki a szóban forgó jelenségek értelmezése olyanféleképen, mint azt Julius fentebb kifejtett elméletében a napprotuberantiák esetében megkisérlette.

Tegyük fel, hogy a vizsgált fémgőz valamely *aa* absorptiovonala környékére, melynek hullámhossza λ_0, anomal dispersiot mutat, melynek menetét a mellékelt 3. ábra tünteti fel. λ_1 hullámhossznál lesz a törésmutató minimuma, λ_2-nél maximuma; az első érték kisebb, az utóbbi nagyobb az egységnél és $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$. Ha most a 4. ábrában E a vízbe merített hengeres fémelektródok egyike, melyet jobbról síkfelület határol, akkor a kisérlet körülményeiből önként következik, hogy a szikra behatása alatt keletkező, az elektród végét burkoló gőzök sűrűsége rohamosan csökken, ha a határlaptól jobbfelé, a hideg folyadék felé haladunk. Ezt a rétegződést kivántam a görbe ívekkel vázlatosan jelképezni, mely görbék az egyenlő sűrűségű pontokat kötik össze. Ily viszonyok között a λ_2 hullámhosszú sugarakra a gőzréteg úgy fog hatni, mintha a törésmutató befelé növekednék, a λ_1 hullámhosszú sugarakra pedig épen ellenkező értelemben, úgy mintha n befelé kisebbednék. Ha tehát a spektroskop O irányban van elhelyezve, az O felé haladó λ_2 hullámhosszú sugarak útja a gőzrétegben az elektród felé fog görbülni, mint azt az ábra folytonos vonalai mutatják, ellenben a λ_1 hullámhosszú sugarak az elektrod közelében kifelé görbülnek, mint azt az ábra szakgatott vonalai jelzik. Az első esetben tehát a sugarak a gőztömeg mélyebb s ezért intenzivebben világító



3. ábra.

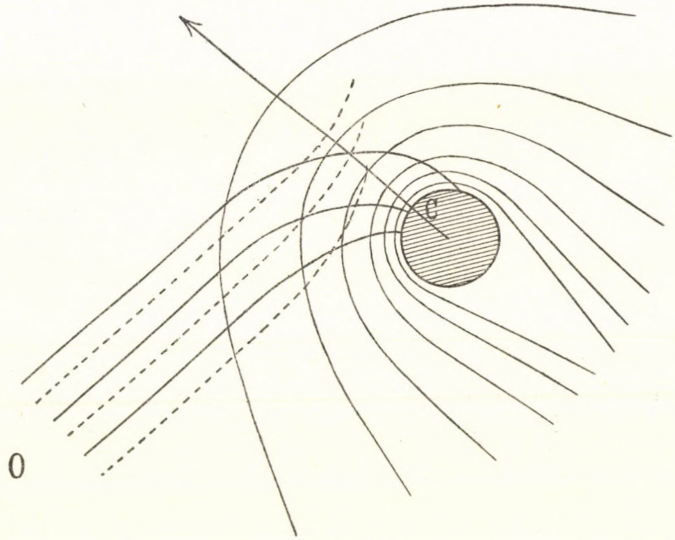


4. ábra.

rétegeiből jutnak a spektroskop résére, míg a második esetben a felülethez közelebb eső rétegekből, melyek kevésbbé fényesek. A spektrumban tehát a λ_0 vonal ibolya felé eső oldalára kevesebb fény fog esni, mi a sötét vonal keletkezésének oka, ellenben a vörös felé eső oldalra több fény jut, mint a λ_0 helyére, itt tehát fényes vonal fog fellépni és így az intenzitás menete a λ_0 vonal környékén általában meg fog felelni a dispersio-görbe alakjának.

Ezen meggondolások egyszerűen átvihetők az új csillagok fényjelenségeire, ha azok feltünését Seeliger hypothesise alapján magyarázzuk. Ezen hypothesis alapján az új csillagok hirtelen felvillanását úgy kell képzelnünk, hogy egy sötét, vagy csak kevéssé világító égitest egy kozmikus köd- vagy portömegbe hatol, s ezen utóbbi részecskéi az égitest légkörébe jutván, abban meteorok módjára izzókká válnak s ezáltal a légkört s az égitest felületét is magas hőmérsékletre hevítik.

Jelölje az 5. ábrában a nyíl az égitest sebességének irányát, akkor az atmosphæra a mozgás irányába eső C pont környékén lesz a legfényesebb s itt lesznek a világító gőzök a legsűrűbbek,



5. ábra.

mint azt az égitestet körülburkoló görbék jelképezik. Ha a gőzök valamely λ_0 hullámhosszaságú vonala környékén anomal dispersiót tételezünk fel, melynek menete a 3. ábra görbéjének felel meg, itt is olyan jelenségek fognak a spektrumban a λ_0 vonal környékén fellépni, mint azt előbb a szikraspektrumok esetében részleteztem. A λ_2 hullámhosszaságú sugarak a légkör nagyobb terjedelmű és fényesebb rétegeiből fognak az O-ban levő észlelő spektroskopjába juthatni, mint azt az égitest felületéig folytatódó, folytonosan kihúzott görbék mutatják, ellenben a törésmutató minimumának megfelelő λ_1 hullámhosszaságú sugarak, mint azt az ábrában a szakgatottan kihúzott görbék jelképezik, a légkörben kifelé fognak görbülni s nem juthatnak a legfényesebb gőzrétegekig. Tehát itt is fényhiány fog mutatkozni a spektrumban a λ_1 hely környéken, ellenben nagyobb intenzitás a λ_2 hely közelében, vagyis a fényelosztás ez esetben is meg fog felelni az észlelésnek: a széles, vörös felé elmosódott emissióvonal élesen lesz határolva a másik szélén s ehhez csatlakozik a többé-kevésbbé széles és intenziv absorptiovonal a λ_0 helytől az ibolya felé eső oldalon. Az első vonal a vörös felé, az utóbbi az ibolya felé lesz eltolódva. Az emissiovonal fényessége általában fokozatosan fog növekedni az ibolya felé eső széléig, de képzelhető az az eset is, hogy ily hullámhosszaknál n nagyobb lévén az egységnél, esetleg némely λ_0-hoz közel eső sugarak már egyáltalában nem lépnek ki az égitest légköréből, minek feltételét SEELIGER más esetekben részletesen kifejtette. Igy tehát az emissiovonal intenzitása eleinte gyorsan növekedvén, bizonyos hullámhossztól kezdve λ_0-ig hosszabb darabon állandó maradhat. Az így létrejövő vonalpáron kívül még egy rendes helyzetű (vagy DOPPLER elve szerint kissé eltolódott) absorptio-vonal is léphet még fel, mint azt a Nova Persei spektrumában több ízben észlelték is. Az ily módon létrejött különböző eredetű vonalak eltolódása igen különböző lehet s egyáltalában nem feltünő, ha az eltolódásokból levezetett radialis sebességek is igen eltérnek egymástól.

A mozgás irányának változásából, egyes izzó gőztömegek leválásából stb. a legkülönbözőbb (esetleg periodikus) változások is egyszerűen magyarázhatók, minőket gyakran észleltek a Novákban. Ezenkívül a kozmikus felhő sűrűségének különbözősége is jelentékenyen módosíthatja a fényjelenségek lefolyását.

Ez az elmélet számot ad még a rövid periodusú változók spektrumában észlelt jelenségekről is. Csak azt kell feltételeznünk, hogy az égitest forog és hogy emissioképessége felületének nem minden pontjában ugyanaz. E mellett a DOPPLER-féle elvre és a nyomásváltozásokra alapított vonaleltolódások sem tekinthetők egyes esetekben kizártaknak.

Összefoglalva láthatjuk tehát, hogy az anomal dispersio feltevése egyes astrophysikai jelenségeknél azok értelmezését lényegesen megkönnyíti s ha ezen újabb elméletek nem is adnak pontosan számot a jelenségek minden részletéről, mégis már azáltal, hogy valószinűtlen és complicalt mechanikai feltevéseket nélkülözhetőkké tesznek, ezen új törekvések már eddig is gyümölcsözőknek tekinthetők az astrophysika terén és határozott haladást jelentenek.

Báró Harkányi Béla.

Utalványczim: Math. és Phys. Társ. 5997. sz. cheque-számlájára.

Kimutatás

az 1904. év január havában befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek:

1902. évre: Gidófalvy Géza — — — — — — — — 6 kor.

1903. évre: Fodor László dr. 6 kor., Kövesi Ferencz dr. 10 kor., Oszlaczky Szilárd 10 kor., Ratkovszky Pál 6 kor., Rucsinszky Lajos 10 kor. Összesen — — — — — — — — — — — 42 kor.

1904. évre: Feichtinger Győző 10 kor., Ferenczy István 6 kor., Grosz Ferencz 6 kor., Hirschmann Nándor 6 kor., Hortobágyi Zsigmond 6 kor., Ilosvay Lajos dr. 10 kor., Karai Sándor 6 kor., Korda Dezső 6 kor., Kövesi Ferencz dr. 10 kor., Oszlaczky Szilárd 10 kor., Pekár Dezső dr. 10 kor., Petry Gyula 6 kor., Raffmann Jákó dr. 10 kor., Ratkovszky Pál 6 kor., Rátz László 10 kor., Rucsinszky Lajos 10 k., Szőke Béla 10 kor., Wodeczky József 6 kor. Összesen — — — — — — — — — — — 144 kor.

Előfizetési dijat fizettek:

1904. évre Bártfai áll. főgymn. 10 k., Brassói áll. főreálisk. 10 kor., Budapesti II. k. áll. főreálisk. 10 kor., Deési áll. főgymn. 10 k., Egri áll. főreáliskola 6 kor., Fogarasi áll. főgymn. 10 kor., Gyulafehérvári róm. kath. főgymn. 10 kor., Gyulai gymn. 6 kor., Jászberényi kir. kath. főgymn. 10 kor., Kaposvári áll. főgymn. 10 k., Karczagi ev. ref. főgymn. 10 kor., Lőcsei áll. főreálisk. 10 kor., Makói áll. főgymn. 10 kor., Miskolczi ev. ref. főgymn. 10 kor., Nagyenyedi Bethlen főisk. 10 kor., Nagyváradi áll. főreálisk. 10 k., Orosházai polg. iskola 10 kor., Pannonhalmi főapátsági könyvtár 10 kor., Paxner és Biron 10 kor., Privigyei kegy. rendi gymn. 10 kor., Pozsonyi kir. kath. főgymn. 10 kor., Sepsiszentgyörgyi ev. ref. főgymn. 10 kor., Soproni ág. hitv. ev. lyceum 10 kor., Soproni áll. főreálisk. 6 kor., Szarvasi ág. h. ev. főgymn. 10 kor., Szászvárosi ev. ref. Kun-kollegium 10 kor., Szegzárdi áll. főgymn. 10 kor., Székesfehérvári áll. főreálisk. 10 kor., Ujvidéki kir. kath. főgymn. 10 kor., Ungvári áll. főreálisk. 10 kor. Összesen — — 288 kor.

Összesen befolyt:

Hátralékokból — — — — — — — — — — — — — 48 kor.
F. évi díjból — — — — — — — — — — — — — 144 kor.
Előfizetési díjból — — — — — — — — — — — — 288 kor.

Kelt Budapesten, 1904 február 1.

Feichtinger Győző
pénztárnok.
(VII., Aréna-út 15.)

Kimutatás

az 1904. év február hóban befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek:

1902. évre: Hassák Vidor ... ... 6 kor.

1903. évre: Bihary Ferencz 6 kor., Frank Dezső 6 kor., Hauszmann Alajos 10 kor., Jónás Ödön 10 kor., Pecz Samu 10 kor., Rejtő Sándor 10 kor., Schimanek Emil 10 kor., Széprépthy Béla 6 kor., Szily Kálmán 10 kor., Szontágh Gusztáv 6 k., Wartha Vincze dr. 10 kor. Összesen ... ... 94 kor.

1904. évre: Barányi Balázs 6 kor., Berkes Imre 10 kor., Butorka Száva dr. 6 kor., Csopey László 10 kor., Czekeliusz Aurél 10 kor., Dirner Gusztáv dr. 10 kor., Eberling József 10 kor., Eötvös Loránd br. dr. 10 kor., Frank István 6 kor., Gotthard Jenő 6 kor., Heuer Ede 10 kor., Kados Aladár 10 kor., Ketterer Károly 6 kor., Klein Pál 6 kor., Kleiszner Rezső 10 kor., Klúg Lipót dr. 6 kor., Konkoly Thege Miklós ifj. 6 kor., Kopp Lajos dr. 10 kor., Koschovitz Gyula 10 kor., König Gyula dr. 10 kor., Lendvay Hugó 6 kor., Lengyel Sándor 10 kor., Malatin Gotthárd 4 kor., Mattyasovszky Kászon 6 kor., Pallos Béla Kajetán 6 kor., Pető Menyhért 6 kor., Rados Ignácz 10 kor., Szabó József 6 kor., Szakmáry József 6 kor., Székely Károly 6 kor., Szenessy Mihály 10 kor., Terlanday Emil 10 kor., Vámos Dezső 10 kor., Vater József 10 kor., Zemplén Győző dr. 10 kor. Összesen ... ... 294 kor.

1905. évre: Malatin Gotthárd ... ... 2 kor.

Előfizetési díjat fizettek:

1903. évre: Aradi állami főreáliskola ... ... 10 kor.

1904. évre: Aradi áll. tanítóképző 10 kor., Aradi kir. főgymn. 10 kor., Beregszászi áll. főgymn. 10 kor,, Brassói r. kath. főgymn. 10 kor., Budapesti VI. k. áll. főreálisk. 10 kor., Budapesti Tanárképző int. gyakorló főgymn. 10 kor., Csiksomlyói r. k. főgymn. 10 kor., Debreczeni áll. főreálisk. 10 kor., Érsekújvári közs. főgymn. 10 kor., Győri áll. főreálisk. 10 kor., Gyulai főgymn. 4 kor., Hajdúnánási ev. ref. főgymnasium 10 kor., Kisújszállási ev. ref. főgymn. 10 kor., Körmöczbányai áll. főreáliskola 10 kor., Marosvásárhelyi r. kath. főgymn. 10 kor., Mármarosszigeti ev. ref. főgymn. 10 kor., Nyitrai felsőbb leányisk. 10 kor., Orsovai áll. polg. isk. 10 kor., Selmeczbányai kir. kath. főgymn., 10 kor., Szakolczai főgymn. 10 kor., Székelyudvarhelyi áll. főreálisk. 10 k., Zilahi ev. ref. főgymn. 10 kor. Összesen ... ... 214 kor.

Alapítványt tett:

Gruber Nándor ... ... 200 kor.

Összesen befolyt:	Hátralékokból	100 kor., január 1-től	148 kor.
	F. és köv. évi díjból ...	296 kor., « «	434 kor.
	Előfizetési díjból	224 kor., « «	512 kor.
	Alapítványi díjból		200 kor.

Kelt Budapesten, 1904 márczius 1.

Feichtinger Győző
pénztárnok.
(VII., Aréna-út 15.)

A KETTŐS PARTICZIÓKRÓL.

(Első közlemény.)

I. Bevezetés. A két változós particzionális alkotó függvény.

Az egyszerű particziók elméletének legközelebbi általánosítása a kettős particziók elmélete. E tárgygyal való foglalkozást úgy számelméleti érdekből, mint az invariáns elméleti alkalmazások szempontjából ugyanolyan okok teszik indokolttá és szükségessé, mint az egyszerű particzióknál. A kettős particziók elmélete az egész számok additiv előállításának az a problemája, hogy hányfélekép lehet az A pozitiv egész számot az

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

pozitiv egész számokból ismétlések megengedésével összeadás útján úgy előállitani, hogy minden ilyen előállításhoz a B pozitiv egész számra nézve a

$$b_1, b_2, \ldots, b_n$$

elemekből egy-egy megfelelő előállítás tartozzék olyan formán, hogy két-két előállításban a megfelelő a_i, b_i elemek egyenlő mértékben szerepeljenek. A feladat úgy is fogalmazható, hogy hány megoldása van nem negativ egész számokban az

$$\begin{aligned} a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n &= A \\ b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n &= B \end{aligned}$$

határozatlan egyenletrendszernek. Analitikailag a kérdéses szám az

$$\frac{1}{(1-x^{a_1}y^{b_1})(1-x^{a_2}y^{b_2})\ldots(1-x^{a_n}y^{b_n})}$$

két változós raczionális törtfüggvénynek x és y növekedő hatványai szerinti kifejtésében $x^A y^B$ együtthatóját jelenti.

Idetartozó kérdések már EULER particzionális feladatai közt is előfordulnak, de csak egyszerűbb, specziálisabb alakban. Például részletesen tárgyalja az

$$\frac{1}{(1-z)(1-xz)\ldots(1-x^k z)}$$

raczionális törtfüggvény kifejtését. Könnyen ki lehet mutatni, hogy e feladat egyszerű particziókra vezethető vissza.*

A kettős particziók általánosabb alakjával CAYLEY** foglalkozott. Bizonyos specializálások bevezetésével, ú. m. az

$$\frac{a_i}{b_i}$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

törtek mind különbözők és irreducibilisek, továbbá

$$B+2>b_i,$$
$$(i=1, 2, \ldots, n)$$

kimutatja, hogy e feltételek mellett a kettős particziók igen symmetrikus módon egyszerű particziókra vezethetők vissza. Ugyane kérdésnek a legáltalánosabb esetben való eldöntésére CAYLEY módszere már nem alkalmas.

Jelen dolgozat épen e hiányt akarja pótolni. Czélja kimutatni, hogy a kettős particziók mindig egyszerű particziókra vezethetők vissza. Azonkívül megállapítja a kettős particziók számának kifejezésére szolgáló függvények jellemző alakját, kiegészítésekép az egyszerű particziók megfelelő problemájának. Az egyszerű particziók általános elméletében kimutattuk,*** hogy az

$$\frac{1}{(1-x^{a_1})(1-x^{a_2})\ldots(1-x^{a_n})}=\sum_{A=0}^{\infty}P(A)x^A$$

---

* V. ö. CSORBA GY.: «A partitio numerorum irodalma». Math. és Phys. Lapok. VIII. évf.

** «On a Problem of double Partitions». Phil. Mag. 20.

*** V. ö. CSORBA GY.: «Adalék az egész számok additiv előállításának elméletéhez». Math. és Term.-tud. Értesítő. XVII.

raczionális tört kifejtésében az x^A hatvány $P(A)$ együtthatóját ily alakú függvény fejezi ki:

$$\varphi(A) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(A)\, A^k,$$

a hol $c_k(A)$ A-ra nézve periodikus számelméleti függvény.

Itt megállapítjuk, hogy az

$$\frac{1}{(1-x^{a_1}y^{b_1})(1-x^{a_2}y^{b_2})\dots(1-x^{a_n}y^{b_n})} = \sum_{A,\,B=0}^{\infty} P(A,B)\, x^A y^B$$

raczionális törtfüggvény kifejtésében az $x^A y^B$ tag $P(A, B)$ együtthatóját ily alakú függvények fejezik ki:

$$\Phi(A,B) = \sum_{\substack{\alpha,\beta=0 \\ (0 \leqq \alpha+\beta \leqq n-2)}}^{n-2} c_{\alpha,\beta}(A,B)\, A^\alpha B^\beta,$$

hol $c_{\alpha,\beta}(A, B)$ kettősen periodikus számelméleti függvény.

Számelméletileg ez eredmények a partitio numerorum kérdésénél egyelőre az elmélet teljessége szempontjából birhatnak jelentőséggel. Az invariánselméleti alkalmazások azonban egyenesen ráutalnak az ilynemű vizsgálatokra. Elég felemlíteni, hogy a binär alakok tanában az n-edrendű alak ϱ-fokú, ν-rendű, μ súlyú $\left(\mu = \frac{n\varrho-\nu}{2}\right)$ lineárisan független covariánsai számát $x^\mu z^\varrho$ együtthatója fejezi ki

$$\frac{1-x}{(1-z)(1-xz)(1-x^2z)\dots(1-x^nz)}$$

kifejtésében. E tétel a kiinduló pontja az egész Cayley és Sylvester-féle invariánselméleti módszernek, és ugyane tétel Hilbert * újabb irányú nagyérdekű vizsgálataiban is alkalmazást talál. De a kettős particziók legáltalánosabb tipusának is megvan a megfelelő invariánselméleti alkalmazása. Ugyanis az

$$I_1,\ I_2, \dots, I_n$$

---

* V. ö. Hilbert: «Über vollen Invariantensysteme». Math. Annalen. 42.

binär covariánsokból, melyeknek foka megfelelőleg:

$$\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n,$$

rendje:

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n,$$

súlya:

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n,$$

az

$$I_1^{x_1} I_2^{x_2} I_n^{x_n}$$

hatványszorzat alakjában componálható ϱ-fokú, ν-rendű covariánsok összes számát a

$$\varrho_1 x_1 + \varrho_2 x_2 + \cdots + \varrho_n x_n = \varrho$$
$$\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \cdots + \nu_n x_n = \nu$$

határozatlan egyenletrendszer nem negativ egész megoldásainak száma fejezi ki.

E dolgozat egyik czélja épen olyan példákkal egészíteni ki a kettős particziók általános elméletét, hogy ezek egyszersmind alkalmas kiindulásául szolgálhassanak néhány érdekes invariánselméleti közleménynek.

II. Az egyik változó szerinti kifejtés együtthatóinak charakterisztikus alakja.

Az

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1-x^{a_i}y^{b_i})}$$

két változós raczionális törtfüggvény hatványsorba fejtése úgy eszközölhető, hogy előbb csak az egyik változó szerint fejtjük ki.

Ha a teljes kifejtés volna:

$$\sum_{A,B=0}^{\infty} P(A, B)\, x^A y^B,$$

az egyik változó szerinti kifejtés pedig:

$$\sum_{B=0}^{\infty} \Phi(B)\, y^B,$$

hol $\Phi(B)$ az x-nek valamely raczionális kifejezése, akkor lenne:

$$P(A, B) = \text{coeffs.}\, x^A \text{ in } \Phi(B).$$

A felvett raczionális törtnek y szerinti kifejtése végett legczélszerűbb azt előbb y szerint olyan parcziális törtekre bontani, a melyeknek kifejtése már könnyen eszközölhető. CAYLEY* is ezt az eljárást alkalmazta. Csakhogy a tört nevezőjében a komplex és többszörös gyökök lehetősége a felbontásnál olyan rendkívüli complicatiókat okoz, hogy a felbontást és így a kifejtést tényleg elvégezni CAYLEYnek is csak bizonyos jelentékenyen speczializált esetben sikerült. Hogy a kifejtésben a parcziális törtekre bontás módszerét a legáltalánosabb esetben is alkalmazhassuk, bizonyos átalakítással a kérdéses raczionális tört helyett olyan másikat vezetünk be a tárgyalásba, hol a nevezőben arra a változóra nézve, mely szerint a parcziális törtekre bontás történik, legalább a komplex gyökök lehetősége ki van zárva. Ez az átalakitás olyan eljárással történik, melyet már az egyszerű particziók elméletében is sikerrel alkalmaztunk.

E tárgyalásban szükséges megkülönböztetni a nevező azon tényezőit, melyekben y kitevői, a b_i számok, zérustól különböznek; szükséges továbbá csoportosítani ama tagokat, melyeknél a kitevőkből alkotott

$$\frac{a_i}{b_i}$$

törtek egyenlők; azért a következő általánosabb alakból kell kiindulnunk:

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{v} \prod_{\varrho=1}^{s_i} (1 - x^{a_{i\varrho}} y^{b_{i\varrho}}) \prod_{\varepsilon=1}^{k} (1 - x^{\alpha_\varepsilon})} = \sum_{A, B=0}^{\infty} P(A, B) x^A y^B, \qquad (1)$$

hol a $b_{i\varrho}$ számok mind zérustól különböznek, és az

$$\frac{a_{i\varrho}}{b_{i\varrho}}$$
$$(\varrho = 1, 2, \ldots, s_i)$$

* «On a Problem of double Partitions». Phil. Mag. 20.

törtek mind egyenlők, legyen közös értékök

$$\frac{a_i}{b_i}$$

irreducibilis tört. Azonkívül mindig úgy képzelhetjük rendezve a tényezőket, hogy

$$\frac{a_i}{b_i} \lesseqgtr \frac{a_m}{b_m},$$

a mint

$$i \lesseqgtr m.$$

Ha most

$$\Phi(B\,;\,x) = \text{coeffs. } y^B \, in \, \frac{1}{\prod\limits_{i=\varrho}^{v} \prod\limits_{\varrho=1}^{s_i} (1 - x^{a_{i\varrho}} y^{b_{i\varrho}})}, \tag{2}$$

akkor

$$P(A, B) = \text{coeffs. } x^A \, in \, \frac{\Phi(B, x)}{\prod\limits_{\varepsilon=1}^{k} (1 - x^{\alpha_\varepsilon})}. \tag{3}$$

A $\Phi(B\,;\,x)$ kiszámítása végett mindenekelőtt az

$$\frac{1}{\prod\limits_{i} \prod\limits_{\varrho} (1 - x^{a_{i\varrho}} y^{b_{i\varrho}})}$$

raczionális törtet kellene y szerint parcziális törtekre bontani. E feladat helyébe következőkép vezetünk be egyszerűbb feladatot.

Legyen a

$$b_{i\varrho}$$
$$(i=1, 2, \ldots, v\,;\quad \varrho=1, 2, \ldots, s_i)$$

zérustól különböző pozitiv egész számok *valamely* közös többese b, úgy hogy

$$k_{i\varrho} b_{i\varrho} = b,$$
$$(i=1, 2, \ldots, v\,;\quad \varrho=1, 2, \ldots, s_i)$$

akkor a

$$k_{i\varrho} a_{i\varrho} = b \frac{a_{i\varrho}}{b_{i\varrho}}$$
$$(\varrho=1, 2, \ldots, s_i)$$

számok a feltételek szerint mind egyenlők, közös értékök:

$$b \frac{a_i}{b_i}.$$

Most a

$$\prod_{i=1}^{v}\prod_{\varrho=1}^{s_i}\frac{(1-x^{k_{i\varrho}a_{i\varrho}}y^{k_{i\varrho}b_{i\varrho}})}{(1-x^{a_{i\varrho}}y^{b_{i\varrho}})}$$

szorzat, miután egyes tényezői is egészek, olyan egész kifejezés, mely y szerint rendezve, ha még

$$s_1+s_2+\cdots+s_v=s,$$

általánosságban ily alakú:

$$\prod_i\prod_\varrho\left(\frac{1-x^{k_{i\varrho}a_{i\varrho}}y^b}{1-x^{a_{i\varrho}}y^{b_{i\varrho}}}\right)=F(0)+F(1)\,y^1+\cdots+F(sb-1)\,y^{sb-1},\quad(4)$$

a hol is $F(M)$ az x-nek egész kifejezése, de

$$F(sb-\tau)=0,$$

ha

$$1\leqq\tau<\sum_{i\varrho}b_{i\varrho}.$$

Az

$$\frac{1}{\prod_i\prod_\varrho(1-x^{a_{i\varrho}}y^{b_{i\varrho}})}$$

raczionális tört nem változik, ha ezzel az egész kifejezéssel mind számlálóját, mind nevezőjét megszorozzuk. Ha szorzóul a számlálóban az egész kifejezés kifejtett alakját, a nevezőben pedig annak szorzatalakját használjuk, úgy a szorzás ily eredményre vezet:

$$\frac{1}{\prod_i\prod_\varrho(1-x^{a_{i\varrho}}y^{b_{i\varrho}})}=\frac{F(0)+F(1)\,y^1+\cdots+F(sb-1)\,y^{sb-1}}{\prod_{i=1}^{v}\left(1-x^{b\frac{a_i}{b_i}}y^b\right)^{s_i}}.\quad(5)$$

Az így bevezetett

$$\frac{1}{\prod_i\left(1-x^{b\frac{a_i}{b_i}}y^b\right)^{s_i}}$$

raczionális tört a parcziális törtekre bontás szempontjából már sokkal egyszerűbb, mert a nevező minden tényezőjében y-nak egyenlő hatványa fordul elő, és a nevezőnek y szerint lehetséges többszörös gyökei össze vannak foglalva. A feladatot még tovább is lehet egyszerűsiteni. Legyen ugyanis

$$\frac{1}{\prod_i \left(1-x^{b\frac{a_i}{b_i}}\eta\right)^{s_i}} = \sum_{M=0}^{\infty} \Psi(M)\eta^M, \tag{6}$$

akkor

$$\frac{1}{\prod_i \left(1-x^{b\frac{a_i}{b_i}}y^b\right)^{s_i}} = \sum_{M=0}^{\infty} \Psi(M)y^{bM}. \tag{7}$$

Az (5) alatti egyenlőség mindkét oldalának kifejtésében y ugyanazon hatványának együtthatói egyenlők. A baloldal kifejtési együtthatói a (2) alatt vannak megállapitva, a jobboldaléi a (7) által fejezhetők ki. Ha tehát

$$B = \nu + bM, \qquad (\nu < b)$$

úgy az y^B hatvány együtthatói közti egyenlőség a (2) és (7) tekintetbe vételével a következő összefüggés alakjában írható fel:

$$\begin{aligned}\Phi(\nu+bM) = F(\nu)\Psi(M) + F(\nu+b)\Psi(M-1)+\cdots+\\ + F\big(\nu+(s-1)b\big)\Psi\big(M-(s-1)\big).\end{aligned} \tag{8}$$

Vagy ha az

$$M = \frac{B-\nu}{b}$$

összefüggést tekintetbe veszszük:

$$\Phi(B) = \sum_{z=0}^{s-1} F(\nu+zb)\,\Psi\left(\frac{B-(\nu+zb)}{b}\right), \tag{9}$$

hol

$$B \equiv \nu \ (\mathrm{mod}\ b), \qquad (\nu < b).$$

Ezzel a (2) alatti

$$\frac{1}{\prod_i \prod_\varrho (1-x^{a_{i\varrho}}y^{b_{i\varrho}})}$$

kétváltozós raczionális törtfüggvénynek y szerinti kifejtése a (4) alatti egész kifejezés kiszámitása által a (6) alatt bevezetett

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{v}\left(1-x^{b\frac{a_i}{b_i}}\eta\right)^{s_i}}$$

raczionális törtfüggvénynek η szerinti kifejtésére van visszavezetve. Ennek az alaknak η szerinti parcziális törtekre bontása már sokkal könnyebben lehetséges, mert a nevezőben η-ra nézve komplex gyökök nem fordulhatnak elő, a lehetséges többszörös gyökök pedig össze vannak foglalva.

Ha még a következő átalakítást végezzük:

$$\frac{1}{\prod_{m=1}^{v}\left(1-x^{b\frac{a_m}{b_m}}\eta\right)^{s_m}}=\frac{(-1)^s x^{-b\sum_m\frac{a_m}{b_m}s_m}}{\prod_{m=1}^{v}\left(\eta-x^{-b\frac{a_m}{b_m}}\right)^{s_m}}, \tag{10}$$

akkor közvetlenül alkalmazhatjuk a parcziális törtekre bontásnak többszörös valós gyökök esetére vonatkozó általános szabályait. Lesz ugyanis:

$$\frac{1}{\prod_{m=1}^{v}\left(\eta-x^{-b\frac{a_m}{b_m}}\right)^{s_m}}=\sum_{m=1}^{v}\sum_{r=0}^{s_m-1}\frac{A_{m,r}(x)}{\left(\eta-x^{-b\frac{a_m}{b_m}}\right)^{s_m-r}}, \tag{11}$$

a hol

$$A_{m,r}(x)=\frac{1}{r!}\left[\theta_m^{r}(\eta)\right]_{\eta=x^{-b\frac{a_m}{b_m}}},$$

ha

$$\theta_m(\eta)=$$

$$=\frac{1}{\left(\eta-x^{-b\frac{a_1}{b_1}}\right)^{s_1}\cdots\left(\eta-x^{-b\frac{a_{m-1}}{b_{m-1}}}\right)^{s_{m-1}}\left(\eta-x^{-b\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}}\right)^{s_{m+1}}\cdots\left(\eta-x^{-b\frac{a_v}{b_v}}\right)^{s_v}},$$

vagy röviden:

$$\theta_m(\eta)=\frac{1}{\prod_{i=1}^{v}{}^{(m)}\left(\eta-x^{-b\frac{a_i}{b_i}}\right)^{s_i}},$$

és

$$\theta_m^{(r)}(\eta)$$

jelenti az η szerinti r-dik deriváltat.

E definicziók szerint

$$A_{m,0}(x) = \frac{1}{\prod\limits_i^{(m)} \left(x^{-b\frac{a_m}{b_m}} - x^{-b\frac{a_i}{b_i}}\right)^{s_i}} =$$

$$= \frac{\prod\limits_i^{(m)} (-1)^{s_i} \cdot x^{b\frac{a_i}{b_i} s_i}}{\prod\limits_i^{(m)} \left(1 - x^{b\left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_m}{b_m}\right)}\right)^{s_i}}. \tag{12}$$

A többi $A_{m,r}(x)$ tagra, a mint a továbbiakból ki fog tűnni, nem lesz szükségünk.

Tekintve, hogy a (11)-nél

$$\frac{1}{\left(\eta - x^{-b\frac{a_m}{b_m}}\right)^{s_m - r}} = \frac{(-1)^{s_m - r} x^{b\frac{a_m}{b_m}(s_m - r)}}{\left(1 - x^{b\frac{a_m}{b_m}} \eta\right)^{s_m - r}},$$

a (10) figyelembe vételével előáll:

$$\frac{1}{\prod\limits_{m=1}^{v} \left(1 - x^{b\frac{a_m}{b_m}} \eta\right)^{s_m}} =$$

$$= \sum_{m=1}^{v} \sum_{r=0}^{s_m - 1} \frac{(-1)^r x^{-b\frac{a_m}{b_m} r} A_{mr}(x) \prod\limits_{i=1}^{v\,(m)} (-1)^{s_i} x^{-b\frac{a_i}{b_i} s_i}}{\left(1 - x^{b\frac{a_m}{b_m}} \eta\right)^{s_m - r}}. \tag{13}$$

Ezzel elvégeztük a kérdéses raczionális törtfüggvénynek parcziális törtekre való bontását η szerint. Az η növekedő hatványai szerinti kifejtés most már könnyen eszközölhető. Ugyanis az egyszerű particziók elmélete értelmében az összegjelek alatti parcziális tört kifejtése:

$$\frac{1}{\left(1 - x^{b\frac{a_m}{b_m}} \eta\right)^{s_m - r}} = \sum_{M=0}^{\infty} \binom{M + s_m - r - 1}{s_m - r - 1} x^{b\frac{a_m}{b_m} M} \eta^M. \tag{14}$$

Ha tehát rövidség kedvéért a (13)-ban

helyett

$$\left\{(-1)^r x^{-b\frac{a_m}{b_m}r} A_{mr}(x) \prod_{i=1}^{v}{}^{(m)} (-1)^{s_i} x^{-b\frac{a_i}{b_i}s_i}\right\}$$

-et irunk, előáll:

$$R_{mr}(x)\text{-} \tag{15}$$

$$\frac{1}{\prod\limits_{m=1}^{v}\left(1-x^{b\frac{a_m}{b_m}}\eta\right)^{s_m}}=$$

$$=\sum_{m=1}^{v}\sum_{r=0}^{s_m-1}\sum_{M=0}^{\infty}\binom{M+s_m-r-1}{s_m-r-1} x^{b\frac{a_m}{b_m}M} R_{mr}(x)\eta^M. \tag{16}$$

E kifejezést így is lehet rendezni:

$$\frac{1}{\prod\limits_{m=1}^{v}\left(1-x^{b\frac{a_m}{b_m}}\eta\right)^{s_m}}=$$

$$=\sum_{M=0}^{\infty}\left\{\sum_{m=1}^{v}\sum_{r=0}^{s_m-1}\binom{M+s_m-r-1}{s_m-r-1} x^{b\frac{a_m}{b_m}M} R_{mr}(x)\right\}\eta^M. \tag{17}$$

Így a hatványsorba fejtés η szerint el van végezve. Miután a (6) alatt η^M coefficiensét $\Psi(M)$-el jelöltük, tehát az eredmény:

$$\Psi(M)=\sum_{m=1}^{v}\sum_{r=0}^{s_m-1}\binom{M+s_m-r-1}{s_m-r-1} x^{b\frac{a_m}{b_m}M} R_{mr}(x). \tag{18}$$

Most már az (1) alatti particzionális törtfüggvénynek az y változó szerinti kifejtésében y^B együtthatója a (9) alkalmazásával lesz:

$$\Phi(B;\, x)=$$

$$=\sum_{z=0}^{s-1}\sum_{m=1}^{v}\sum_{r=0}^{s_m-1}\binom{\frac{B-(\nu+zb)}{b}+s_m-r-1}{s_m-r-1} x^{\frac{a_m}{b_m}(B-(\nu+zb))} R_{mr}(x)\,F(\nu+zb), \tag{19}$$

vagy ha az összegezések sorrendjét felcseréljük:

$$\Phi(B;\,x) =$$

$$= \sum_{m=1}^{v} x^{\frac{a_m}{b_m}B} \sum_{r=0}^{s_m-1} \left[\sum_{z=0}^{s-1} \begin{pmatrix} \frac{B-(\nu+zb)}{b} + s_m - r - 1 \\ s_m - r - 1 \end{pmatrix} x^{-\frac{a_m}{b_m}(\nu+zb)} F(\nu+zb) \right] R_{mr}(x).$$

Meg akarjuk állapitani, hogy e kifejezés B-re vonatkozólag milyen alakot vesz fel. A

$$\begin{pmatrix} \frac{B-(\nu+zb)}{b} + s_m - r - 1 \\ s_m - r - 1 \end{pmatrix}$$

binomiális jelvény kifejtése

$$\left(\frac{B-(\nu+zb)}{b}\right)\text{-}$$

re nézve (s_m-r-1)-fokú egész kifejezést szolgáltat; ugyanilyen fokú lesz a kifejezés, ha B-re nézve rendezzük. Mivel

$$r = 0, 1, 2, \ldots, s_m - 1$$

lehet, tehát B-re nézve az összevonásban (s_m-1)-fokú egész kifejezést nyerünk. Így $\Phi(B;\,x)$ kifejezése a következő alakot ölti fel:

$$\Phi(B;\,x) = \sum_{m=1}^{v} x^{\frac{a_m}{b_m}B} \left\{ c_{m,0}(\nu;\,x) + c_{m,1}(\nu;\,x) B^1 + \cdots + \right.$$
$$\left. + c_{m,s_m-1}(\nu;\,x) B^{s_m-1} \right\}. \qquad (21)$$

Ugyanilyen alakú $\Phi(B;\,x)$ kifejezése, ha a *tetszőleges* b helyett b_0, a $b_{i\varrho}$ számok *legkisebb* közös többese szerepel; ekkor $c_m(\nu;\,x)$ helyén $c_m(\nu_0;\,x)$ áll, hol

$$\nu_0 \equiv B \,(\mathrm{mod}\; b_0), \qquad (\nu_0 < b_0).$$

A $c_m(\nu_0;\,x)$ úgy is tekinthető, mint B függvénye, de B-nek *periodikus* függvénye, mert ennek csak a b_0 meghatározott osztóra vonatkozó ν_0 maradékától függ. Így tehát $\Phi(B;\,x)$ *charakterisztikus alakját* következőleg írhatjuk fel:

$$\Phi(B\,;\,x) = \sum_{m=1}^{v} x^{\frac{a_m}{b_m}B} \{c_{m,0}(B\,;\,x) + c_{m,1}(B\,;\,x)B^1 + \cdots + c_{m,s_m-1}(B\,;\,x)B^{s_m-1}\}, \tag{22}$$

hol a $c_m(B\,;\,x)$-féle B-re nézve periodikus függvények, nem tartalmazzák a tetszőleges b számot.

Megjegyzendő, hogy $\Phi(B\,;\,x)$-nek e kifejezése csak *látszólag irraczionális;* ez az irraczionalitás az összevonások után eltűnik, mert mint a

$$\Phi(B\,;\,x) = \text{coeffs } y^B \textit{ in } \frac{1}{\prod\limits_i \prod\limits_\varrho (1 - x^{a_{i\varrho}} y^{b_{i\varrho}})}$$

definiczióból következik, $\Phi(B\,;\,x)$ az x-ben raczionális, és pedig, mint alantabb kimutatjuk, raczionális egész kifejezés.

A kitűzött kérdés megoldása a $c_{m,t}(B\,;\,x)$-féle függvények kiszámítását szabja feladatul; mert ha így $\Phi(B\,;\,x)$ teljes kifejezése elő van állítva, akkor a (3) szerint

$$P(A,B) = \text{coeffs } x^A \textit{ in } \frac{\Phi(B\,;\,x)}{\prod\limits_{\varepsilon=1}^{k} (1 - x^{a_\varepsilon})}$$

a kettős particziók száma.

III. A charakterisztikus alak periodikus tagjainak kiszámítási módjai.

A kettős particziók $P(A,B)$ számának meghatározása végett a $\Phi(B\,;\,x)$ számára a II. (20) alatt előállított kifejezést kell tovább elemeznünk. E kifejezésben a II. (4) alatt definiált F értékeknek ilyenféle függvényei szerepelnek:

$$G_h^{(m)}(b,\nu) = \sum_{z=0}^{s-1} (\nu + zb)^h \, x^{-\frac{a_m}{b_m}(\nu + zb)} F(\nu + zb). \tag{1}$$

Ezeket, mint alantabb ki fogjuk mutatni, lehetséges direkt a kérdés adataival kifejezni. Mielőtt ezt tennénk, elvégezzük ama átalakításokat, melyek által e függvények bevezettetnek $\Phi(B;\, x)$ kifejezésébe.

A binomiális együtthatók törvényei szerint

$$\binom{\frac{B-(\nu+zb)}{b}+s_m-r-1}{s_m-r-1}=$$

$$=\frac{1}{(s_m-r-1)!}\sum_{k=0}^{s_m-r-1} f_k(s_m-r-1)\left(\frac{B-(\nu+zb)}{b}\right)^k, \qquad (2)$$

hol $f_k(s_m-r-1)$ jelenti az $1, 2, 3, \ldots, (s_m-r-1)$ elemekből alkotható $(s_m-r-1-k)$-adfokú elemi symmetrikus függvényt.

Ha itt megint

$$\big(B-(\nu+zb)\big)^k=\sum_{t=0}^{k}(-1)^{k-t}\binom{k}{t}B^t(\nu+zb)^{k-t},$$

úgy

$$\binom{\frac{B-(\nu+zb)}{b}+s_m-r-1}{s_m-r-1}=$$

$$=\frac{1}{(s_m-r-1)!}\sum_{k=0}^{s_m-r-1} f_k(s_m-r-1)\sum_{t=0}^{k}\frac{(-1)^{k-t}}{b^k}\binom{k}{t}B^t(\nu+zb)^{k-t}. \qquad (3)$$

Cseréljük fel a k és t betűk szerinti összegezések sorrendjét, akkor a

$$\sum_{k=0}^{s_m-r-1}\ \sum_{t=0}^{k}$$

összegezés helyére lép a

$$\sum_{t=0}^{s_m-r-1}\ \sum_{k=t}^{s_m-r-1}$$

összegezés, és lesz

$$\binom{\dfrac{B-(\nu+zb)}{b}+s_m-r-1}{s_m-r-1}=$$

$$=\frac{1}{(s_m-r-1)!}\sum_{t=0}^{s_m-r-1}B^t\sum_{k=t}^{s_m-r-1}\frac{(-1)^{k-t}}{b^k}f_k(s_m-r-1)\binom{k}{l}(\nu+zb)^{k-t}. \quad (4)$$

Vezessük be végre a

$$h=k-t$$

jelzést és k helyett összegezzünk h szerint. Akkor a

$$\sum_{k=t}^{s_m-r-1}$$

összegezés helyébe lép a

$$\sum_{h=0}^{s_m-r-t-1}$$

összegezés, és így

$$\binom{\dfrac{B-(\nu+zb)}{b}+s_m-r-1}{s_m-r-1}=$$

$$=\frac{1}{(s_m-r-1)!}\sum_{t=0}^{s_m-r-1}B^t\sum_{h=0}^{s_m-r-t-1}\frac{(-1)^h}{b^{h+t}}f_{h+t}(s_m-r-1)\binom{h+t}{t}(\nu+zb)^h. \quad (5)$$

Ezzel a $\Phi(B;x)$ II. (20) alatti kifejezése, ha még tekintetbe veszszük a III. (1) alatt bevezetett jelzést is, következőleg alakul át:

$$\Phi(B;x)=\sum_{m=1}^{v}x^{\frac{a_m}{b_m}B}\sum_{r=0}^{s_m-1}\frac{R_{m,r}(x)}{(s_m-r-1)!}\sum_{t=0}^{s_m-r-1}B^t\times$$

$$\times\sum_{h=0}^{s_m-r-t-1}\frac{(-1)^h}{b^{h+t}}f_{h+t}(s_m-r-1)\binom{h+t}{t}G_h^{(m)}(b,\nu). \quad (6)$$

Vagy ha B hatványai szerint rendezünk:

$$\Phi(B\,;\,x)=\sum_{m=1}^{v} x^{\frac{a_m}{b_m}B}\sum_{t=0}^{s_m-1} B^t \left\{\sum_{r=0}^{s_m-t-1}\frac{R_{mr}(x)}{(s_m-r-1)!}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{h=0}^{s_m-r-t-1}\frac{(-1)^h}{b^{h+t}}f_{h+t}(s_m-r-1)\binom{h+t}{t}G_h^{(m)}(b,\nu)\right\}. \tag{7}$$

Ha ezt a II. (22) alatti előállítással összehasonlítjuk, kitűnik, hogy $c_{m,t}(B;\,x)$ teljes kifejezése:

$$c_{m,t}(B\,;\,x)=$$

$$=\sum_{r=0}^{s_m-t-1}\frac{R_{mr}(x)}{(s_m-r-1)!}\sum_{h=0}^{s_m-r-t-1}\frac{(-1)^h}{b^{h+t}}f_{h+t}(s_m-r-1)\binom{h+t}{t}G_h^{(m)}(b,\nu) \tag{8}$$

vagy h szerint rendezve:

$$c_{m,t}(B\,;\,x)=$$

$$=\sum_{h=0}^{s_m-t-1}\sum_{r=0}^{s_m-t-h-1}\frac{R_{mr}(x)}{(s_m-r-1)!}f_{h+t}(s_m-r-1)\frac{(-1)^h}{b^{t+h}}\binom{t+h}{h}G_h^{(m)}(b,\nu). \tag{9}$$

Ha még rövidség kedvéért a

$$(-1)^h\binom{t+h}{h}\sum_{r=0}^{s_m-t-h-1}\frac{R_{mr}(x)}{(s_m-r-1)!}f_{h+t}(s_m-r-1)=D_{t,h}^{(m)} \tag{10}$$

jelzést vezetjük be, akkor a jellegzetes alak

$$c_{m,t}(B\,;\,x)=\sum_{h=0}^{s_m-t-1}\frac{1}{b^{t+h}}D_{t,h}^{(m)}G_h^{(m)}(b,\nu) \tag{11}$$

$$(t=0,1,2,\ldots,(s_m-1)).$$

Ilyen a $c_{m,t}(B;\,x)$ kifejezése a $G_h^{(m)}(b,\nu)$-féle függvények által, melyek a kérdés adataival direkt kifejezhetők. Az itt szereplő $D_{t,h}^{(m)}$ jelvény nem tartalmazza a b hatványait; b csak az x kitevőiben jön elő benne.

Ezzel meg lenne a képlet a $c_{m,t}(B; x)$ függvények teljes kiszámításához. De ilyen módon végezni a számítást nagyon hosszadalmas lenne, mert $G_h^{(m)}(b, \nu)$ teljes kifejezése igen complicált. Lehet sokkal egyszerűbb módját is találni a meghatározásnak, mely által a tetszőleges b szám is kiesik a tárgyalásból. Az eljárás a következő.

Alkalmazzuk a (11) egyenletet

$$b^{s_m-1} c_{m,t}(B; x) = \sum_{h=0}^{s_m-t-1} b^{s_m-t-h-1} D_{t,h}^{(m)} G_h^{(m)}(b, \nu)$$

alakban

$$t = s_m - 1,\ s_m - 2, \ldots, t$$

esetekre. Előállanak:

$$b^{s_m-1} c_{m,\,s_m-1}(B; x) = b^0 D_{s_m-1,\,0}^{(m)} G_0^{(m)}(b, \nu)$$

$$b^{s_m-1} c_{m,\,s_m-2}(B; x) = b^1 D_{s_m-2,\,0}^{(m)} G_0^{(m)}(b, \nu) + b^0 D_{s_m-2,\,1}^{(m)} G_1^{(m)}(b, \nu)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b^{s_m-1} c_{m,t}(B; x) = b^{s_m-t-1} D_{t,0}^{(m)} G_0^{(m)}(b, \nu) +$$
$$+ b^{s_m-t-2} D_{t,1}^{(m)} G_1^{(m)}(b, \nu) + \cdots + b^0 D_{t,\,s_m-t-1}^{(m)} G_{s_m-t-1}^{(m)}(b, \nu).$$

Szorozzuk ez egyenleteket sorra: $b^{s_m-t-1}, b^{s_m-t-2}, \ldots, b^0$ tényezőkkel, akkor a

$$b^{s_m-t-1} G_0^{(m)}(b, \nu),\ b^{s_m-t-2} G_1^{(m)}(b, \nu), \ldots, b^0 G_{s_m-t-1}(b, \nu)\text{-}$$

re nézve előálló lineáris egyenletrendszerből:

$$D_{s_m-1,\,0}^{(m)} D_{s_m-2,\,1}^{(m)}, \ldots, D_{t,\,s_m-1-t}^{(m)} G_{s_m-1-t}^{(m)}(b, \nu) =$$

$$= b^{s_m-1} \cdot \begin{vmatrix} D_{s_m-1,\,0}^{(m)} & 0 & \ldots & b^{s_m-t-1} c_{m,\,s_m-1}(B; x) \\ D_{s_m-2,\,0}^{(m)} & D_{s_m-2,\,1}^{(m)} & \ldots & b^{s_m-t-2} c_{m,\,s_m-2}(B; x) \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ D_{t,0}^{(m)} & D_{t,1}^{(m)} & \ldots & b^0 c_{m,t}(B; x) \end{vmatrix}$$

hol a $D^{(m)}$-féle mennyiségek nem tartalmazzák b hatványait.

E kifejezés szerint $G_{s_m-1-t}^{(m)}(b, \nu)$ ily alakú kifejezés:

$$G_{s_m-1-t}^{(m)}(b; \nu) = b^{s_m-1}\{\Delta_{t,t} c_{m,t}(B; x) + b^1 \Delta_{t,t+1} c_{m,t+1}(B; x) +$$
$$+ \cdots + b^{s_m-1-t} \Delta_{t,\,s_m-1} c_{m,\,s_m-1}(B; x)\},$$

hol a Δ_t-féle jelvények nem tartalmazzák a b hatványait.

Ez az eredmény azt jelenti, hogy $G^{(m)}_{s_m-1-t}(b, \nu)$ kifejezésében b^{s_m-1} coefficiense épen

$$\Delta_{t,t}\, c_{m,t}(B;\, x),$$

a hol

$$\Delta_{t,t} = \frac{D^{(m)}_{s_m-1,0}\, D^{(m)}_{s_m-2,1} \ldots D^{(m)}_{t+1,\, s_m-2-t}}{D^{(m)}_{s_m-1,0}\, D^{(m)}_{s_m-2,1} \ldots D^{(m)}_{t,\, s_m-1-t}} = \frac{1}{D^{(m)}_{t,\, s_m-1-t}}.$$

Így

$$\text{coeffs } b^{s_m-1}\; in\; G^{(m)}_{s_m-1-t}(b, \nu) = \frac{1}{D^{(m)}_{t,\, s_m-1-t}}\, c_{m,t}(B;\, x)$$

és fordítva

$$c_{m,t}(B;\, x) = D^{(m)}_{t,\, s_m-1-t}\left[\text{coeffs } b^{s_m-1}\; in\; G^{(m)}_{s_m-1-t}(b, \nu)\right].$$

A (10) alatti definitió szerint

$$D^{(m)}_{t,\, s_m-1-t} = (-1)^{s_m-1-t}\binom{s_m-1}{t}\frac{R_{m,0}(x)}{(s_m-1)!}\, f_{s_m-1}(s_m-1) =$$

$$= \frac{(-1)^{s_m-1-t}}{t!\,(s_m-1-t)!}\, R_{m,0}(x).$$

A II. (15) és II. (12) szerint pedig

$$R_{m,0}(x) = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{v}{}^{(m)}\left(1 - x^{b\left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_m}{b_m}\right)}\right)^{s_i}}.$$

E szerint

$$c_{m,t}(B;\, x) =$$

$$= \frac{(-1)^{s_m-1-t}}{t!\,(s_m-1-t)!\prod\limits_{i=1}^{v}{}^{(m)}\left(1 - x^{b\left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_m}{b_m}\right)}\right)^{s_i}}\left\{\text{coeffs } b^{s_m-1}\; in\; G^{(m)}_{s_m-1-t}(b, \nu)\right\} \quad (12)$$

$$B \equiv \nu \pmod{b}, \quad (\nu < b).$$

Arra a rendkívüli egyszerűsítésre jutottunk tehát, hogy a kérdéses periodikus függvények kiszámítása végett elég általában a

$$G^{(m)}_h(b, \nu)$$

függvények kifejezéséből a b^{s_m-1} hatvány coefficiensét kiszámitani.

IV. A periodikus tagok előállítása.

A $G_h^{(m)}(b, \nu)$-féle függvényeknek III. (1) alatti

$$G^{(m)}(b, \nu) = \sum_{z=0}^{s-1} (\nu+zb)^h x^{-\frac{a_m}{b_m}(\nu+zb)} F(\nu+zb)$$

meghatározása azt mutatja, hogy ezek a II. (4) alatti

$$F(0)+F(1)y^1+\cdots+F(sb-1)y^{sb-1} =$$

$$= \prod_{i=1}^{v} \prod_{\varrho=1}^{s_i} \frac{(1-x^{k_{i\varrho}a_{i\varrho}}y^{k_{i\varrho}b_{i\varrho}})}{(1-x^{a_{i\varrho}}y^{b_{i\varrho}})}$$

egész kifejezésből úgy állhatnak elő, hogy előbb y szerint h-szor alkalmazzuk rá az

$$y\frac{\partial}{\partial y}$$

úgynevezett polározási műveletet, azután pedig y helyébe

$$y = \omega_r x^{-\frac{a_m}{b_m}}$$

értéket helyettesítünk, hol ω_r valamely b-dik egységgyököt jelent ($\omega_r^b = 1$). Az összevonás után ω_r^ν együtthatója épen $G_h^{(m)}(b, \nu)$ lesz. Legyen rövidség kedvéért

$$\left(\frac{1-x^{k_{i\varrho}a_{i\varrho}}y^{k_{i\varrho}b_{i\varrho}}}{1-x^{a_{i\varrho}}y^{b_{i\varrho}}}\right) = u_{i\varrho}, \tag{1}$$

akkor a fenti műveleteknek az

$$F(0)+F(1)y^1+\cdots+F(sb-1)y^{sb-1} = \prod_i \prod_\varrho (u_{i\varrho})$$

azonosság mindkét oldalára való alkalmazása eredményét következő alakban lehet előállítani:

$$G_h^{(m)}(b, 0)\omega_r^0 + G_h^{(m)}(b, 1)\omega_r^1 + \cdots + G_h^{(m)}(b, \nu)\omega_r^\nu + \cdots +$$

$$+ G_h^{(m)}(b, b-1)\omega_r^{b-1} = \left[\Delta^h\left(\prod_i \prod_\varrho u_{i\varrho}\right)\right]_{y=\omega_r x^{-\frac{a_m}{b_m}}}, \tag{2}$$

hol Δ^h az y szerinti h-dik polárt jelenti.

Ha most ezt az egyenletet az összes ω_r b-dik egységgyökökre nézve felírjuk, a

$$G_h^{(m)}(b,\nu) \quad (\nu=0,1,2,\ldots,b-1)$$

függvényekre nézve olyan lineáris egyenletrendszer áll elő, melyből általában $G_h^{(m)}(b,\nu)$ számára a következő kifejezést nyerhetjük: *

$$G_h^{(m)}(b,\nu)=\frac{1}{b}\sum_{r=1}^{b}\frac{[\Delta^h(\prod_i\prod_\varrho u_{i\varrho})]_{y=\omega_r x}-\frac{a_m}{b_m}}{\omega_r^\nu}. \quad (\nu=0,1,2,\ldots,b-1) \tag{3}$$

Meg kell határoznunk b^{s_m-1} együtthatóját $G_h^{(m)}(b,\nu)$ kifejezésében. Ez az együttható egyenlő b^{s_m} együtthatójával

$$bG_h^{(m)}(b,\nu)=\sum_{r=1}^{b}\frac{[\Delta^h(\prod_i\prod_\varrho u_{i\varrho})]}{\omega_r^\nu} \tag{4}$$

kifejezésében.

A szorzat polárjára vonatkozó általános tétel szerint

$$[\Delta^h(\prod_i\prod_\varrho u_{i\varrho})]=\sum_{\sum\limits_{i\varrho}h_{i\varrho}=h}\frac{h!}{\prod\limits_i\prod\limits_\varrho h_{i\varrho}!}\prod_i\prod_\varrho[\Delta^{h_{i\varrho}}(u_{i\varrho})]$$

vagy megkülönböztetve az $i=m$-nek megfelelő tényezőket:

$$[\Delta^h(\prod_i\prod_\varrho(u_{i\varrho}))]=$$

$$=\sum_{\sum\limits_i^{(m)}\sum\limits_\varrho h_{i\varrho}+\sum\limits_\sigma h_{m\sigma}=h}\frac{h!}{\prod\limits_i^{(m)}\prod\limits_\varrho h_{i\varrho}!\prod\limits_\sigma h_{m\sigma}!}\prod_i^{(m)}\prod_\varrho[\Delta^{h_{i\varrho}}(u_{i\varrho})]\prod_\sigma[\Delta^{h_{m\sigma}}(u_{m\sigma})]. \tag{5}$$

E megkülönböztetés alapján a számításokban egyszerűsítéseket eszközölhetünk. Ugyanis az ω_r-re vonatkozó összegezés olyan tagokat szolgáltathat, melyeknek zérus értékű tényezői vannak. E tagokat a tárgyalásból eleve eltávolítjuk. Az erre vonatkozó eljárás következő.

* V. ö. az ilyen lineáris egyenletrendszer megoldását illetőleg: CSORBA GY. «Adalék az egész számok additiv előállításának elméletéhez». Math. és Term. Értesítő. XVII. kötet, 194—195. lap.

A $bG_h^{(m)}(b,\nu)$ kifejezésében előforduló összegezések sorrendjét ekképen lehet rendezni:

$$bG_h^{(m)}(b,\nu) = \sum_{\sum\limits_i^{(m)}\sum\limits_\varrho h_{i\varrho}+\sum h_{m\sigma}=h} \frac{h!}{\prod\limits_i^{(m)}\prod\limits_\varrho h_{i\varrho}!\prod\limits_\sigma h_{m\sigma}!}$$

$$\sum_{r=1}^{b} \frac{\prod\limits_i^{(m)}\prod\limits_\varrho [\Delta^{h_{i\varrho}}(u_{i\varrho})]\prod\limits_\sigma [\Delta^{h_{m\sigma}}(u_{m\sigma})]}{\omega_r^\nu}. \tag{6}$$

Most a $h_{m,1}, h_{m,2}, \ldots, h_{m,s_m}$ számok közt zérusok fordulhatnak elő, például lehet, hogy csak

$$h_{m,\sigma_1}, h_{m,\sigma_2}, \ldots, h_{m,\sigma_k}$$

nem zérus, ellenben a többi:

$$h_{m,\tau_1} = h_{m,\tau_2} = \cdots = h_{m,\tau_\varepsilon} = 0.$$
$$(k+\varepsilon=s_m)$$

Ennélfogva a fenti kifejezés így is rendezhető:

$$bG_h^{(m)}(b,\nu) =$$

$$= \sum_{k=0}^{s_m-1} \sum_{\substack{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k=1\\ \sigma_1<\sigma_2<\ldots<\sigma_k}}^{s_m} \sum_{\sum\limits_i^{(m)}\sum\limits_\varrho h_{i\varrho}+\sum\limits_\sigma h_{m\sigma}=h} \frac{h!}{\prod\limits_i^{(m)}\prod\limits_\varrho h_{i\varrho}!\prod\limits_\sigma h_{m\sigma}!}$$

$$\sum_{r=1}^{b}\left\{\frac{\prod\limits_i^{(m)}\prod\limits_\varrho [\Delta^{h_{i\varrho}}(u_{i\varrho})][\Delta^{h_{m\sigma_1}}(u_{m\sigma_1})]\ldots[\Delta^{h_{m\sigma_k}}(u_{m\sigma_k})][u_{m\tau_1}]\ldots[u_{m\tau_\varepsilon}]}{\omega_r^\nu}\right\}, \tag{7}$$

hol $\sigma=\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ lehet; $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\varepsilon$ az $1, 2, 3, \ldots, s_m$ elemsor valamely permutácziója; $k=0$ esetben $\varepsilon=s_m$, és a $\sum\limits_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k}$ összegezés nem szerepel, továbbá $h_{m\sigma}=0$.

Itt általában

$$[u_{m\tau}]_{y=\omega_r x^{-\frac{a_m}{b_m}}} = \frac{(1-\omega_r^b)}{(1-\omega_r^{b_{m\tau}})}$$

csak úgy nem zérus, és pedig ekkor értéke

$$\frac{b}{b_{m\tau}},$$

ha ω_r nemcsak b-dik, de egyszersmind $b_{m\tau}$-dik egységgyök, tehát

$$1-\omega_r^b=0,$$

és

$$1-\omega_r^{b_{m\tau}}=0.$$

Így

$$[u_{m\tau_1}]\,[u_{m\tau_2}]\dots[u_{m\tau_\varepsilon}]$$

és az egész szorzat is, melynek ez tényezője, csak olyan ω_r b-dik egységgyökökre nézve nem zérus, melyek az

$$1-\omega_r^{b_{m\tau_1}}=0$$

$$1-\omega_r^{b_{m\tau_2}}=0$$

$$\dots\dots$$

$$1-\omega_r^{b_{m\tau_\varepsilon}}=0$$

feltételeknek mind megfelelnek, tehát

$$d_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_k}\text{-}$$

dik egységgyökök, ha $d_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_k}$ jelenti a

$$b_{m\sigma_1},\ b_{m\sigma_2},\dots,\ b_{m\sigma_k}$$

kivételével a többi b_m számnak,

$$b_{m\tau_1},\ b_{m\tau_2},\dots,\ b_{m\tau_\varepsilon}\text{-}$$

nak legnagyobb közös osztóját.

Megadott σ_1, $\sigma_2,\dots,\sigma_k$ számsorozat mellett elegendő tehát az ω_r-re vonatkozó összegezést az összes b-dik egységgyökök helyett csak a

$$d_{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_k}\text{-}$$

dik egységgyökökre kiterjeszteni. Ilyen módon lesz:

$$bG_h^{(m)}(b,\nu)=$$

$$=\sum_{k=0}^{s_m-1}\ \sum_{\substack{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_k=1\\ \sigma_1<\sigma_2<\ldots<\sigma_k}}^{s_m}\ \sum_{\sum\limits_i^{(m)}\sum\limits_\varrho h_{i\varrho}+\sum h_{m\sigma}=h}\frac{h!}{\prod\limits_i^{(m)}\prod\limits_\varrho h_{i\varrho}!\ \prod\limits_\sigma h_{m\sigma}!}$$

$$\sum_{r=1}^{d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}}\left\{\frac{\prod\limits_i^{(m)}\prod\limits_\varrho[\Delta^{h_{i\varrho}}(u_{i\varrho})][\Delta^{h_{m\sigma_1}}(u_{m\sigma_1})]\ldots[\Delta^{h_{m\sigma_k}}(u_{m\sigma_k}][u_{m\tau_1}]\ldots[u_{m\tau_\varepsilon}]}{\omega_r^\nu}\right\},\quad (8)$$

hol a megállapitás szerint ω_r jelent

$$d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}\text{-}$$

dik egységgyököt.

Jegyzet. A $k=0$ esetben $h_{m\sigma}=0$, és $d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}$ helyére lép $d^{(m)}$, az *összes* b_m-féle számok legnagyobb közös osztója.

Czélunk kiszámitani $bG_h^{(m)}(b,\nu)$ kifejezésében b^{s_m} együtthatóját. Mint alantabb kimutatjuk,

$$[\Delta^{h_{m\sigma}}(u_{m\sigma})]\quad\text{és}\quad[u_{m\tau}]$$
$$(\sigma,\tau=1,2,\ldots,s_m)$$

kifejezéseiben b legkisebb előforduló hatványa b^1; ennélfogva a $bG_h^{(m)}(b,\nu)$ számára felirt többtagú kifejezésben előforduló szorzattagokból a b^{s_m} hatványt csak egyféleképp lehet előállitani, úgy t. i. hogy minden

$$[\Delta^{h_{m\sigma}}(u_{m\sigma})]\quad\text{és}\quad[u_{m\tau}]\text{-}$$

féle tényezőből, melyeknek száma s_m, veszszük a b^1 hatványos tagot, a

$$[\Delta^{h_{i\varrho}}(u_{i\varrho})]\text{-}$$

féle tényezőkből pedig a b^0 hatványos tagot, és ezek szorzatát alkotjuk.

A

$$d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}\text{-}$$

dik egységgyökökre nézve (ω_r):

$$[u_{m\tau}]_{y=\omega_r x}-\frac{a_m}{b_m}=\frac{(1-\omega_r^b)}{(1-\omega_r^{b_{m\tau}})}=\frac{b}{b_{m\tau}},$$

itt tehát

$$\text{coeffs } b^1 \; in \; [u_{m\tau}] = \frac{1}{b_{m\tau}}. \tag{9}$$

Másodszor általában

$$\Delta^{h_{m\sigma}}(u_{m\sigma}) = \Delta^{h_{m\sigma}} \left\{ \sum_{z_{m\sigma}=0}^{k_{m\sigma}-1} x^{z_{m\sigma}a_{m\sigma}} y^{z_{m\sigma}b_{m\sigma}} \right\} =$$

$$= \sum_{z_{m\sigma}=0}^{k_{m\sigma}-1} (z_{m\sigma}b_{m\sigma})^{h_{m\sigma}} x^{z_{m\sigma}a_{m\sigma}} y^{z_{m\sigma}b_{m\sigma}}.$$

Innen

$$\left[\Delta^{h_{m\sigma}}(u_{m\sigma})\right]_{y=\omega_r x^{-\frac{a_m}{b_m}}} = \sum_{z_{m\sigma}=0}^{k_{m\sigma}-1} (z_{m\sigma}b_{m\sigma})^{h_{m\sigma}} \omega_r^{z_{m\sigma}b_{m\sigma}},$$

hol ω_r jelent $d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}$-dik egységgyököt.

Itt

$$\omega_r^{z_{m\sigma}b_{m\sigma}} = \omega_r^{z'_{m\sigma}b_{m\sigma}},$$

ha

$$z_{m\sigma}b_{m\sigma} - z'_{m\sigma}b_{m\sigma} \equiv 0 \pmod{d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}},$$

vagy ha $b_{m\sigma}$ és $d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}$ *legnagyobb közös osztója*

$$d^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k},$$

midőn

$$z_{m\sigma} - z'_{m\sigma} = \frac{d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}}{d^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}} = t^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}.$$

Írjunk tehát $z_{m\sigma}$ helyébe

$$(\nu_{m\sigma} + t^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}\tau_{m\sigma})$$

kifejezést, hol

$$\nu_{m\sigma} < t^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k},$$

úgy az összeg tagjai következőleg állíthatók elő:

$$[\Delta^{h_{m\sigma}}(u_{m\sigma})] =$$

$$= b_{m\sigma}^{h_{m\sigma}} \sum_{\nu_{m\sigma}=0}^{t^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}-1} \; \sum_{\tau_{m\sigma}=0}^{\frac{k_{m\sigma}}{t^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}}-1} (\nu_{m\sigma} + \tau_{m\sigma}t^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k})^{h_{m\sigma}} \omega_r^{\nu_{m\sigma}b_{m\sigma}}.$$

Bevezetve a

$$(\nu_{m\sigma}+\tau_{m\sigma}t^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k})^{h_{m\sigma}}$$

binomiális hatvány kifejtését:

$$[\Delta^{h_{m\sigma}}(u_{m\sigma})] =$$

$$= b_{m\sigma}^{h_{m\sigma}} \sum_{\nu_{m\sigma}} \sum_{\tau_{m\sigma}} \sum_{\xi=0}^{h_{m\sigma}} \binom{h_{m\sigma}}{\xi} \nu_{m\sigma}^{h_{m\sigma}-\xi} (\tau_{m\sigma} t^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k})^{\xi} \omega_r^{\nu_{m\sigma}b_{m\sigma}} =$$

$$= b_{m\sigma}^{h_{m\sigma}} \sum_{\xi=0}^{h_{m\sigma}} \binom{h_{m\sigma}}{\xi} (t^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k})^{\xi} \sum_{\nu_{m\sigma}} \nu_{m\sigma}^{h_{m\sigma}-\xi} \omega_r^{\nu_{m\sigma}b_{m\sigma}} \Big\{ \sum_{\tau_{m\sigma}} \tau_{m\sigma}^{\xi} \Big\}.$$

Az egyenlő kitevőjű hatványokból alkotott számtani sorok összegezésére vonatkozó arithmetikai szabályok szerint: *

$$\sum_{\tau_{m\sigma}=0}^{\frac{k_{m\sigma}}{t^{(\sigma)}_{\sigma_1\ldots\sigma_k}}-1} \tau_{m\sigma}^{\xi} =$$

$$= \frac{k_{m\sigma}}{t^{(\sigma)}_{\sigma_1\ldots\sigma_k}} \left\{ A_{\xi,0} + A_{\xi,1} \left(\frac{k_{m\sigma}}{t^{(\sigma)}}\right)^1 + \cdots + A_{\xi,\xi} \left(\frac{k_{m\sigma}}{t^{(\sigma)}}\right)^{\xi} \right\},$$

hol

$$A_{\xi,\xi} = \frac{1}{\xi+1}$$

$$A_{\xi,\xi-1} = -\frac{1}{2}$$

$$A_{\xi,\xi-2k} = (-1)^{k-1} \frac{1}{2k} \binom{\xi}{2k-1} B_{2k-1} \quad (k>0)$$

$$A_{\xi,\xi-(2k+1)} = 0 \qquad (k>0)$$

és B jelent BERNOULLI-féle számot.

Mivel

$$\frac{k_{m\sigma}}{t^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}} = \frac{b}{b_{m\sigma} t^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}},$$

---

* V. ö. pl. FRÖHLICH I.: «Mathematikai Repertorium».

tehát így a $[\Delta^{h_{m\sigma}}(u_{m\sigma})]$ kifejezésében b-nek előfordulható legkisebb hatványa b^1, és ennek együtthatója:

$$\text{coeffs } b^1 \; in \; [\Delta^{h_{m\sigma}}(u_{m\sigma})] =$$

$$= b_{m\sigma}^{h_{m\sigma}-1} \sum_{\xi=0}^{h_{m\sigma}} \binom{h_{m\sigma}}{\xi} (t^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k})^{\xi-1} A_\xi \sum_{\nu_{m\sigma}} \nu_{m\sigma}^{h_{m\sigma}-\xi} \omega_r^{\nu_{m\sigma} b_{m\sigma}},$$

hol is

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = -\frac{1}{2}$$

$$A_{2k} = (-1)^{k-1} B_{2k-1} \qquad (k>0)$$

$$A_{2k+1} = 0 \qquad (k>0). \tag{10}$$

Vezessünk be most megkülönböztetésül

$$\xi \text{ helyett } \xi_{m\sigma}$$

betűt, akkor

$$\text{coeffs } b^1 \; in \; [\Delta^{h_{m\sigma}}(u_{m\sigma})] =$$

$$= b_{m\sigma}^{h_{m\sigma}-1} \sum_{\xi_{m\sigma}=0}^{h_{m\sigma}} \binom{h_{m\sigma}}{\xi_{m\sigma}} (t^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k})^{\xi_{m\sigma}-1} A_{\xi_{m\sigma}} \sum_{\nu_{m\sigma}} \nu_{m\sigma}^{h_{m\sigma}-\xi_{m\sigma}} \omega_r^{\nu_{m\sigma} b_{m\sigma}},$$

vagy ha rövidség kedvéért

$$\frac{b_{m\sigma}^{h_{m\sigma}}}{t^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}} \sum_{\xi_{m\sigma}=0}^{h_{m\sigma}} \binom{h_{m\sigma}}{\xi_{m\sigma}} A_{\xi_{m\sigma}} (t^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k})^{\xi_{m\sigma}} \nu_{m\sigma}^{h_{m\sigma}-\xi_{m\sigma}} =$$

$$= f_{m\sigma}(\nu_{m\sigma}), \tag{11}$$

mely tehát $\nu_{m\sigma}$-nak bizonyos egész kifejezése, akkor

$$\text{coeffs } b^1 \; in \; [\Delta^{h_{m\sigma}}(u_{m\sigma})] = \frac{1}{b_{m\sigma}} \sum_{\nu_{m\sigma}=0}^{t^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}-1} f_{m\sigma}(\nu_{m\sigma})\, \omega_r^{b_{m\sigma}\nu_{m\sigma}}, \tag{12}$$

hol

$$\omega_r^{d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}} = 1,$$

$$t^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k} = \frac{d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}}{d^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}}.$$

Jegyzet. Midőn $k=0$, akkor $h_{m\sigma}=0$, $\nu_{m\sigma}=0$, $f_{m\sigma}(\nu_{m\sigma})=1$.
Harmadszor szükséges

$$\text{coeffs } b^0 \; in \left[\Delta^{h_{i\varrho}}(u_{i\varrho})\right]_{y=\omega_r x}{}^{-\frac{a_m}{b_m}} \quad (i \gtreqless m)$$

kiszámítása.

Mivel

$$u_{i\varrho}=\left(\frac{1-x^{b\frac{a_{i\varrho}}{b_{i\varrho}}}y^b}{1-x^{a_{i\varrho}}y^{b_{i\varrho}}}\right),$$

$$\Delta^{h_{i\varrho}}(u_{i\varrho})=\binom{h_{i\varrho}}{0}\Delta^{h_{i\varrho}}\left(1-x^{b\frac{a_{i\varrho}}{b_{i\varrho}}}y^b\right)\Delta^0\left(\frac{1}{1-x^{a_{i\varrho}}y^{b_{i\varrho}}}\right)+$$
$$+\binom{h_{i\varrho}}{1}\Delta^{h_{i\varrho}-1}\left(1-x^{b\frac{a_{i\varrho}}{b_{i\varrho}}}y^b\right)\Delta^1\left(\frac{1}{1-x^{a_{i\varrho}}y^{b_{i\varrho}}}\right)+$$
$$+\;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\binom{h_{i\varrho}}{h_{i\varrho}}\Delta^0\left(1-x^{b\frac{a_{i\varrho}}{b_{i\varrho}}}y^b\right)\Delta^{h_{i\varrho}}\left(\frac{1}{1-x^{a_{i\varrho}}y^{b_{i\varrho}}}\right).$$

Ebből

$$\left[\Delta^{h_{i\varrho}}(u_{i\varrho})\right]_{y=\omega_r x}{}^{-\frac{a_m}{b_m}}=$$
$$=-\binom{h_{i\varrho}}{0}b^{h_{i\varrho}}x^{b\left(\frac{a_i}{b_i}-\frac{a_m}{b_m}\right)}\left[\Delta^0\left(\frac{1}{1-x^{a_{i\varrho}}y^{b_{i\varrho}}}\right)\right]+$$
$$-\;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-\binom{h_{i\varrho}}{h_{i\varrho}-1}\left(b^1x^{b\left(\frac{a_i}{b_i}-\frac{a_m}{b_m}\right)}\right)\left[\Delta^{h_{i\varrho}-1}\left(\frac{1}{1-x^{a_{i\varrho}}y^{b_{i\varrho}}}\right)\right]+$$
$$+\binom{h_{i\varrho}}{h_{i\varrho}}\left(1-x^{b\left(\frac{a_i}{b_i}-\frac{a_m}{b_m}\right)}\right)\left[\Delta^{h_{i\varrho}}\left(\frac{1}{1-x^{a_{i\varrho}}y^{b_{i\varrho}}}\right)\right].$$

Innen aztán

$$\text{coeffs } b^0 \; in \left[\Delta^{h_{i\varrho}}(u_{i\varrho})\right]=\left(1-x^{b\left(\frac{a_i}{b_i}-\frac{a_m}{b_m}\right)}\right)\left[\Delta^{h_{i\varrho}}\left(\frac{1}{1-x^{a_{i\varrho}}y^{b_{i\varrho}}}\right)\right].$$

Kifejtve

$$\text{coeffs } b^0 \, in \, [\Delta^{h_{i\varrho}}(u_{i\varrho})] = \left(1 - x^{b\left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_m}{b_m}\right)}\right)\left[\sum_{k=0}^{\infty} (kb_{i\varrho})^{h_{i\varrho}} x^{ka_{i\varrho}} y^{kb_{i\varrho}}\right] =$$

$$= \left(1 - x^{b\left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_m}{b_m}\right)}\right)\left\{\sum_{k=0}^{\infty} (kb_{i\varrho})^{h_{i\varrho}} x^{kb_{i\varrho}\left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_m}{b_m}\right)} \omega_r^{kb_{i\varrho}}\right\},$$

hol

$$\omega_r^{d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}} = 1.$$

Itt

$$\omega_r^{kb_{i\varrho}} = \omega_r^{k'b_{i\varrho}},$$

ha

$$kb_{i\varrho} - k'b_{i\varrho} \equiv 0 \pmod{d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}},$$

vagy ha $b_{i\varrho}$ és $d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}$ legnagyobb közös osztója

$$d^{(i\varrho)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k},$$

midőn

$$k - k' = \frac{d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}}{d^{(i\varrho)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}} = t^{(i\varrho)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}.$$

Írjunk tehát k helyébe

$$(\nu_{i\varrho} + \tau_{i\varrho} t^{(i\varrho)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}$$
$$(\nu_{i\varrho} < t^{(i\varrho)})$$

kifejezést, akkor az összeg tagjai következőkép állíthatók elő:

$$\text{coeffs } b^0 \, in \, [\Delta^{h_{i\varrho}}(u_{i\varrho})] =$$

$$= \left(1 - x^{b\left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_m}{b_m}\right)}\right) \sum_{\nu_{i\varrho}=0}^{t^{(i\varrho)}_{\sigma_1\sigma_k}-1} \sum_{\tau_{i\varrho}=0}^{\infty} b_{i\varrho}^{h_{i\varrho}} (\nu_{i\varrho} + \tau_{i\varrho} t^{(i\varrho)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k})^{h_{i\varrho}}.$$

$$. \, x^{(\nu_{i\varrho} + \tau_{i\varrho} t^{i\varrho}_{\sigma_1\ldots\sigma_k}) \, b_{i\varrho} \left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_m}{b_m}\right)} \omega_r^{b_{i\varrho}\nu_{i\varrho}}.$$

Bevezetve a $(\nu_{i\varrho} + \tau_{i\varrho} t^{(i\varrho)})^{h_{i\varrho}}$ binomiális hatvány kifejtését:

$$\text{coeffs } b^0 \textit{ in } [\Delta^{h_{i\varrho}}(u_{i\varrho})] =$$

$$= \left(1 - x^{b\left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_m}{b_m}\right)}\right) b_{i\varrho}^{h_{i\varrho}} \sum_{\nu_{i\varrho}=0}^{t^{(i\varrho)}-1} \sum_{\tau_{i\varrho}=0}^{\infty} \sum_{\xi_{i\varrho}=0}^{h_{i\varrho}} \binom{h_{i\varrho}}{\xi_{i\varrho}} \nu_{i\varrho}^{h_{i\varrho}-\xi_{i\varrho}} (\tau_{i\varrho} t^{(i\varrho)})^{\xi_{i\varrho}} \cdot$$

$$\cdot x^{(\nu_{i\varrho}+\tau_{i\varrho}t^{(i\varrho)})\, b_{i\varrho}\left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_m}{b_m}\right)} \omega_r^{b_{i\varrho}\nu_{i\varrho}} =$$

$$= \left(1 - x^{b\left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_m}{b_m}\right)}\right) b_{i\varrho}^{h_{i\varrho}} \sum_{\nu_{i\varrho}=0}^{t^{(i\varrho)}-1} x^{\nu_{i\varrho} b_{i\varrho}\left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_m}{b_m}\right)} \omega_r^{\nu_{i\varrho} b_{i\varrho}}$$

$$\sum_{\xi_{i\varrho}=0}^{h_{i\varrho}} \binom{h_{i\varrho}}{\xi_{i\varrho}} \nu_{i\varrho}^{h_{i\varrho}-\xi_{i\varrho}} \sum_{\tau_{i\varrho}=0}^{\infty} (\tau_{i\varrho} t^{i\varrho})^{\xi_{i\varrho}} x^{\tau_{i\varrho} t^{(i\varrho)} b_{i\varrho}\left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_m}{b_m}\right)}.$$

Mivel

$$\sum_{\tau_{i\varrho}=0}^{\infty} (\tau_{i\varrho} t^{(i\varrho)})^{\xi_{i\varrho}} x^{\tau_{i\varrho} t^{(i\varrho)} b_{i\varrho}\left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_m}{b_m}\right)} =$$

$$= \left[\left[\Delta^{\xi_{i\varrho}}\left(\frac{1}{1 - y^{t^{(i\varrho)}}}\right)\right]\right]_{y = x^{b_{i\varrho}\left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_m}{b_m}\right)}}, \tag{13}$$

az eredmény így is írható:

$$\text{coeffs } b^0 \textit{ in } [\Delta^{h_{i\varrho}}(u_{i\varrho})] =$$

$$= \left(1 - x^{b\left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_m}{b_m}\right)}\right) b_{i\varrho}^{h_{i\varrho}} \sum_{\nu_{i\varrho}=0}^{t^{(i\varrho)}-1} \omega_r^{\nu_{i\varrho} b_{i\varrho}} x^{\nu_{i\varrho} b_{i\varrho}\left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_m}{b_m}\right)}.$$

$$\cdot \sum_{\xi_{i\varrho}=0}^{h_{i\varrho}} \binom{h_{i\varrho}}{\xi_{i\varrho}} \nu_{i\varrho}^{h_{i\varrho}-\xi_{i\varrho}} \left[\left[\Delta^{\xi_{i\varrho}}\left(\frac{1}{1 - y^{t^{(i\varrho)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}}}\right)\right]\right].$$

Legyen rövidség kedvéért

$$b_{i\varrho}^{h_{i\varrho}} \sum_{\xi_{i\varrho}=0}^{h_{i\varrho}} \binom{h_{i\varrho}}{\xi_{i\varrho}} \nu_{i\varrho}^{h_{i\varrho}-\xi_{i\varrho}} \left[\left[\Delta^{\xi_{i\varrho}}\left(\frac{1}{1 - y^{t^{(i\varrho)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}}}\right)\right]\right] =$$

$$= g_{i\varrho}(\nu_{i\varrho};\, x), \tag{14}$$

mely tehát a $\nu_{i\varrho}$-nek valamely egész kifejezése, hol az együtthatók x-ben raczionális törtek, akkor

$$\text{coeffs } b^0 \, in \left[\Delta^{h_{i\varrho}}(u_{i\varrho})\right] =$$

$$= \left(1 - x^{b\left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_m}{b_m}\right)}\right) \sum_{\nu_{i\varrho}=0}^{t^{(i\varrho)}_{\sigma_1 \dots \sigma_k} - 1} x^{b_{i\varrho}\left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_m}{b_m}\right)\nu_{i\varrho}} g_{i\varrho}(\nu_{i\varrho}; x)\, \omega_r^{b_{i\varrho}\nu_{i\varrho}}. \tag{15}$$

Ezek után a (8), (9), (12) és (15) tekintetbe vételével lesz:

$$\text{coeffs } b^{s_m} \, in \, b G_h^{(m)}(b, \nu) = \sum_{k=0}^{s_m - 1} \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k = 1 \\ \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_k}}^{s_m} \sum_{\Sigma_i^{(m)} \Sigma_\varrho h_{i\varrho} + \Sigma_\sigma h_{m\sigma} = h}$$

$$\frac{h! \, \prod_i^{(m)} \left(1 - x^{b\left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_m}{b_m}\right)}\right)^{s_i}}{\prod_i^{(m)} \prod_\varrho h_{i\varrho}! \, \prod_\sigma h_{m\sigma}! \; b_{m1} b_{m2} \dots b_{m s_m}} \, .$$

$$\cdot \sum_{r=1}^{d_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k}} \frac{1}{\omega_r^\nu} \left\{ \prod_i^{(m)} \prod_\varrho \left[\sum_{\nu_{i\varrho}=0}^{t^{(i\varrho)}_{\sigma_1 \dots \sigma_k} - 1} x^{b_{i\varrho}\left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_m}{b_m}\right)\nu_{\varrho i}} g_{i\varrho}(\nu_{i\varrho}; x)\, \omega_r^{b_{i\varrho}\nu_{i\varrho}} \right] \right. .$$

$$\left. \cdot \prod_{z=1}^{k} \left[\sum_{\nu_{m\sigma_z}=0}^{t^{(\sigma_z)}_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_k} - 1} f_{m\sigma_z}(\nu_{m\sigma_z})\, \omega_r^{b_{m\sigma_z}\nu_{m\sigma_z}} \right] \right\}, \tag{16}$$

hol $k=0$ esetben $h_{m\sigma}=0$, $\nu_{m\sigma}=0$, $d_{\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_k} = d^{(m)}$, $t^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_k} = 1$, $f_{m\sigma}(\nu_{m\sigma}) = 1$.

Hátra van még az ω_r $d_{\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_k}$-dik egységgyökökre vonatkozó összegezés elvégzése.

A felírt kifejezésben levő $\{-\}$ polynomok szorzata így is előállítható:

$$\sum_{\dots \nu_{i\varrho} \dots \nu_{m\sigma_1} \dots \nu_{m\sigma_k}} \left\{ x^{\Sigma_i^{(m)} \Sigma_\varrho b_{i\varrho}\left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_m}{b_m}\right)\nu_{i\varrho}} \right.$$

$$\left. \left[\prod_i^{(m)} \prod_\varrho g_{i\varrho}(\nu_{i\varrho}; x) \prod_{z=1}^{k} f_{m\sigma_z}(\nu_{m\sigma_z}) \right] . \, \omega_r^{\Sigma_i^{(m)} \Sigma_\varrho b_{i\varrho}\nu_{i\varrho} + \Sigma_{z=1}^{k} b_{m\sigma_z}\nu_{m\sigma_z}} \right\},$$

hol

$$0 \leqq \nu_{i\varrho} < t^{(i\varrho)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}, \quad 0 \leqq \nu_{m\sigma} < t^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}.$$

Ennélfogva

$$\sum_{r=1}^{d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}} \frac{1}{\omega_r^{\nu}} \{-\}$$

összegezés így rendezhető:

$$\sum_{\ldots\nu_{i\varrho}\ldots\nu_{m\sigma_1}\ldots\nu_{m\sigma_k}} \Bigg\{ x^{\sum\limits_i^{(m)} \sum\limits_\varrho b_{i\varrho}\left(\frac{a_i}{b_i}-\frac{a_m}{b_m}\right)\nu_{i\varrho}}$$

$$[\prod_i^{(m)} \prod_\varrho g_{i\varrho}(\nu_{i\varrho};\, x) \prod_z f_{m\sigma_z}(\nu_{m\sigma_z})] .$$

$$. \sum_{r=1}^{d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}} \omega_r^{\sum\limits_i^{(m)} \sum\limits_\varrho b_{i\varrho}\nu_{i\varrho} + \sum\limits_z b_{m\sigma_z}\nu_{m\sigma_z} - \nu} \Bigg\} .$$

Itt

$$\sum_{r=1}^{d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}} \omega_r^{\sum\limits_i^{(m)} \sum\limits_\varrho b_{i\varrho}\nu_{i\varrho} + \sum\limits_z b_{m\sigma_z}\nu_{m\sigma_z} - \nu}$$

csak olyan $\nu_{i\varrho}$ és $\nu_{m\sigma}$-féle értékekre nézve nem zérus, melyekre nézve áll:

$$\sum_i^{(m)} \sum_\varrho b_{i\varrho}\nu_{i\varrho} + \sum_z b_{m\sigma_z}\nu_{m\sigma_z} \equiv \nu \ (\mathrm{mod}\ d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}),$$

és ekkor a kifejezés értéke

$$d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}.$$

Ezek alapján végre

$$\text{coeffs } b^{s_m} \text{ in } bG_h^{(m)}(b,\nu) = \sum_{k=0}^{s_m-1} \sum_{\substack{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k=1 \\ \sigma_1<\sigma_2<\ldots<\sigma_k}}^{s_m} \sum_{\sum\limits_i^{(m)} \sum\limits_\varrho h_{i\varrho} + \sum\limits_\sigma h_{m\sigma} = h}$$

$$\frac{h!\, d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k} \prod\limits_i^{(m)} \left(1 - x^{b\left(\frac{a_i}{b_i}-\frac{a_m}{b_m}\right)}\right)^{s_i}}{\prod\limits_i^{(m)} \prod\limits_\varrho h_{i\varrho}!\, \prod\limits_\sigma h_{m\sigma}!\, b_{m1}b_{m2}\ldots b_{ms_m}} .$$

$$. \sum_{\ldots\nu_{i\varrho}\ldots\nu_{m\sigma_1}\ldots\nu_{m\sigma_k}} \Bigg\{ x^{\sum\limits_i^{(m)} \sum\limits_\varrho b_{i\varrho}\left(\frac{a_i}{b_i}-\frac{a_m}{b_m}\right)\nu_{i\varrho}}$$

$$\prod_i^{(m)} \prod_\varrho g_{i\varrho}(\nu_{i\varrho};\, x) \prod_{z=1}^{k} f_{m\sigma_z}(\nu_{m\sigma_z}) \Bigg\}, \tag{17}$$

hol

$$\sum_{i=1}^{v}{}^{(m)}\sum_{\varrho=1}^{s_i} b_{i\varrho}\nu_{i\varrho} + \sum_{z=1}^{k} b_{m\sigma_z}\nu_{m\sigma_z} \equiv \nu \,(\mathrm{mod}\; d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}),$$

$$0 \leqq \nu_{i\varrho} < t^{(i\varrho)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}, \quad 0 \leqq \nu_{m\sigma} < t^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k};$$

$f_{m\sigma}(\nu_{m\sigma})$ és $g_{i\varrho}(\nu_{i\varrho};\, x)$ kifejezései a (11) és (14) alatt. Azonban $k=0$ esetén $h_{m\sigma}=0$, $\nu_{m\sigma}=0$, $d_{\sigma_1\sigma_2\sigma_k}=d^{(m)}$, az összes b_m-féle számok legnagyobb közös osztója; $t^{(\sigma)}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}=1$, $f_{m\sigma}(\nu_{m\sigma})=1$.

Jegyzet. Mivel $B\equiv\nu\,(\mathrm{mod}\; b)$ és b többese $d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}$-nak, innen

$$B \equiv \nu \,(\mathrm{mod}\; d_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k})$$

következik; a fenti congruentában tehát ν helyébe B is írható.

Csorba György.

A NEGYEDRENDŰ ELSŐFAJÚ TÉRGÖRBÉN LEVŐ PONTKONFIGURÁCZIÓK HELYZETGEOMETRIAI TÁRGYALÁSA.

(Harmadik és befejező közlemény.)

Kongruens húrcsoportok és pontrendszerek.*

Legyenek $g_1, g_2, \ldots, g_n$ *és* $g'_1, g'_2, \ldots, g'_n$ *oly húrok, hogy azon* $P_1, P_2, \ldots, P_n$; $P'_1, P'_2 \ldots, P'_n$ *projicziálások, melyek egy-egy húr végpontjait egymásba projicziálják, Steinerféle rendszert alkotnak, akkor a* $(g)_n$ és $(g')_n$ *húrcsoportokat kongruenseknek nevezzük.* A projicziálások összetételére föntebb nyert tételekből következik, hogy *a g húrok egymás közötti és a g' húrok egymás közötti fölcserélése a kongruens jellegre nincs befolyással,* mert hisz a P_i ill. P'_i projicziálások is permutálhatók. De *nem változtat a kongruens jellegen* az sem, *hogy ha egy húrt húrrendszerének bármely húrjával helyettesítjük,* mert hisz ehhez is ugyanazon projicziálás tartozik. Evidens még, hogy *két húr*

---

* A pontrendszer elnevezést azért választom, mert a csoport név használatát csoportjelleggel nem biró fogalmak jelölésére lehetőleg kerülni óhajtom; a húrcsoport nevet mégis kénytelen vagyok használni, a húrrendszer név már más fogalom jelölésére lévén lefoglalva. A húrcsoport különben is csak átmeneti fogalmul szolgál.

Az itt tárgyalandó húrcsoportokat és pontrendszereket azért nevezem bizonyos föltételek mellett kongruenseknek, mert a definiálandó geometriai összefüggésnek a CLEBSCH-HARNACK-féle analitikai előállításban arithmetikai kongruenczia felel meg. SYLVESTER, a ki a hasonló tulajdonsággal biró pontrendszereket a harmadrendű síkgörbén analitikai módszerekkel vizsgálja, e pontrendszereket *mellérendelt maradékoknak* nevezi.

A kongruens pontrendszerekhez analog, algebrai síkgörbéken fekvő korreziduális pontrendszerek vizsgálata e görbék elméletének egy fontos és átdolgozott részét képezi.

e definiczió alapján *akkor és csak akkor kongruens, ha egy ugyanahhoz a húrrendszerhez tartoznak;* mert $PP'=1$ csak úgy lehet, ha $P\equiv P'$.

Ha két csoport egy közös harmadikkal kongruens, egymással is az. Mert ha e csoportokat jellemző projicziálások: $P_1,\ldots, P_n$; $P'_1,\ldots, P'_n$; $P''_1,\ldots, P''_n$; és a $(P)_n$ és $(P')_n$, ill. $(P)_n$ és $(P'')_n$ csoportokhoz tartozó húrcsoportok kongruensek, akkor

$$P'_n P_n \ldots P'_1 P_1 = 1$$

és

$$P_n P''_n \ldots P_1 P''_1 = 1\,;$$

vagy ha a két relácziót szorozzuk és tekintetbe vesszük, hogy a P_i projicziálások egymást lerontják, úgy nyerjük, hogy:

$$P'_n P''_n \ldots P'_1 P''_1 = 1\,;$$

vagyis a $(P')_n$ és $(P'')_n$ projicziálások Steiner-féle rendszert alkotnak, a $(g)_n$ és $(g')_n$ húrcsoportok tehát kongruensek.

Mivel a Steiner-féle rendszernél $2n-1$ projicziálás a $2n$-iket egyértelműen határozza meg, mint az

$$x\,.\,P_n \ldots P'_1 P_1 = 1$$

egyenlet megoldását, azért a $g_1, g_2, \ldots, g_n$ és $g'_1, g'_2, \ldots, g'_{n-1}$ *húrok is egyértelműen határozzák meg azt a húrrendszert, a melyhez a g'_n húrnak tartoznia kell, hogy a $(g)_n$ és $(g')_n$ csoportok kongruensek legyenek.*

Minden húrcsoport kongruens önönmagával.

Ha $(g)_n$ és $(g')_n$, $(g'')_m$ és $(g''')_m$ két pár kongruens húrcsoport, akkor a $(g, g'')_{m+n}$ és $(g', g''')_{m+n}$ húrcsoportok is kongruensek. Mert akkor

$$P'''_m P''_m \ldots P'''_1 P''_1 P'_n P_n \ldots P'_1 P_1 = 1$$

vagyis a $P_1,\ldots, P_n$, $P''_1,\ldots, P''_m$ és $P'_1,\ldots, P'_n$, $P'''_1,\ldots, P'''_m$ projicziálások Steiner-féle rendszert alkotnak. A tétel olykép fordítható meg, hogy *ha a $(g)_n$ és $(g')_n$ kongruens csoportokból kiválasztható két $(g)_m$ és $(g')_m$ kongruens csoport, akkor a visszamaradt húrok is két kongruens csoportot képeznek.* Mert ha a $(g)_m$ és (g')

csoportoknak, hol $m<n$, megfelelő projicziálások $P_1, \ldots, P_m$ és $P_1', \ldots, P_m'$, akkor egyrészt

$$P_n' P_n \ldots P_1' P_1 = 1,$$

másrészt

$$P_m P_m' \ldots P_1 P_1' = 1;$$

szorozva, mivel a $P_1 \ldots P_m$ és $P_1' \ldots P_m'$ projicziálások kiesnek:

$$P_n' P_n \ldots P_{m+1}' P_{m+1} = 1,$$

tehát a megfelelő $g_{m+1} \ldots g_n$ és $g_{m+1}' \ldots g_n'$ csoportok tényleg kongruensek.

Speciálisan: *két kongruens húrcsoporthoz ugyanazon húrrendszer egy-egy húrját adva vagy belőlük, a mennyiben lehetséges, egy-egy ily húrt elvéve, ismét kongruens húrcsoportokat nyerünk.*

*

A húrcsoportokra definiált kongruenczia fogalomból egyszerű módon építhető fel a pontrendszerek kongruencziájának fogalma. *Két* $(A)_n$ és $(A')_n$ *pontrendszert akkor akarunk kongruensnek nevezni, ha először is mindkettő pontjainak száma n és ha a pontjaikat a görbe tetszésszerinti n pontjával összekötő egyenesek* (hol e pontok mindegyikét mindkét rendszer egy-egy pontjával kapcsoljuk össze) *két kongruens csoportot képeznek.* Kérdés, vajjon kánonikus-e e definiczió, vagyis a két pontrendszer így definiált kongruencziája független-e a definiczióban fölhasznált (nevezzük ezentúl kisegítőnek) pontrendszer választásától? Vagyis ha az $(A)_n$ és $(A')_n$ pontrendszerek olyanok, hogy létezik egy bizonyos $(B)_n$ pontrendszer, úgy hogy az $(A_i B_i)_n$ és $(A_i' B_i)_n$ húrcsoportok kongruensek, akkor, ha egy tetszésszerinti $(C)_n$ pontrendszert választunk a görbén, kongruensek-e az $(A_i C_i)_n$ és $(A_i' C_i)_n$ húrcsoportok is?

A $(B)_n$ segítségével létrehozott húrcsoportokról a $(C)_n$-től létesítettekre térünk át, ha a B_i pontokat rendre a C_i pontokkal helyettesítjük. De az $A_i B_i$, $B_i A_i'$, $A_i' C_i$, $C_i A_i$ húrok zárt négyszöget alkotnak; ha megfelelő projicziálások P_i, P_i', P_i'', P_i''', akkor

$$P_i'''P_i''P_i'P_i=1,$$

tehát egyszersmind

$$\prod_{i=1}^{n} P_i'''P_i''P_i'P_i=1;$$

minthogy továbbá feltevésünk szerint

$$\prod_{i=1}^{n} P_i'P_i=1,$$

azért egyszersmind

$$\prod_{i=1}^{n} P_i'''P_i''=1$$

vagyis az $(A_i C_i)_n$ és $(A_i' C_i)_n$ húrcsoportok is kongruensek.

A pontrendszerek kongruencziájának fentebbi definicziója eszerint *kánonikus*.

Eddigi megfontolásainkban sehol sem kellett a B pontok különböző voltát feltételeznünk: a $(B)_n$ rendszer pontjai egybe is eshetnek. A következő vizsgálatoknál gyakran előnyös a kisegítő pontrendszernek egy n-szeresen szereplő pontra való redukcziója.

A legközelebbi kérdés, hogy a pontrendszerek is megengedik-e a permutácziót, mint a hogy megengedik a húrcsoportok. Minthogy minden permutáczió transzpozicziókra bontható, a kérdést így is fogalmazhatjuk:

Ha $(A)_n$ és $(A')_n$ két oly pontrendszer, hogy a görbén egy tetszésszerinti B pontot választván ki az $(A_i B)_n$ és $(A_i' B)_n$ húrcsoportok kongruensek, kongruens-e a második húrcsoporttal az a húrcsoport, melyet az elsőből nyerünk, ha benne az A_i és A_j pontokat egymással felcseréljük?

A válasz egyszerű. Az A_i és A_j pontok felcserélése csupán az $A_i B$ és $A_j B$ húrok helycseréjét vonta maga után, mely helycsere a húrcsoport kongruens voltára nincsen befolyással. A két húrcsoport tehát kongruens és így kongruensek az $A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_n$ és $A_1', \ldots, A_j', \ldots, A_i', \ldots, A_n'$ pontrendszerek is: a transzpoziczió tehát és ezzel a permutáczió meg van engedve, vagyis *két pontrendszer kongruens volta független a tagok sorrendjétől.*

A kongruens húrcsoportokra adott tételekből már most közvetlenül folynak a következő tételek:

Ha két pontrendszer egy közös harmadikkal kongruens, akkor egymás között is kongruens.

Ha az $(A)_n$ *és* $(A')_n$, *ill. a* $(B)_m$ *és* $(B')_m$ *pontrendszerek kongruensek, akkor az* $(A, B)_{n+m}$ *és* $(A'_1, B')_{n+m}$ *pontrendszerek is kongruensek.*

Ha két kongruens pontrendszerből kiválasztható két kongruens pontrendszer, akkor a visszamaradt pontrendszerek is kongruensek.

Minden pontrendszer kongruens önönmagával.

Ha két kongruens pontrendszerhez ugyanazon pontot adjuk, vagy belőlük, a mennyiben lehetséges, ugyanazon pontot elveszszük, az így nyert két pontrendszer is kongruens.

A megadott $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *és* $A'_1, A'_2, \ldots, A'_{n-1}$ *pontokhoz egy és csak egy olyan* A'_n *pont tartozik, hogy az* $(A)_n$ *és* $(A')_n$ *pontrendszerek kongruensek.*

E tételekből következik, hogy *két* n—n *pontból álló pontrendszer, melyekben* $n-1$ *pont közös, akkor és csak akkor kongruens, ha az* n*-dik pont is közös.*

E szerint *két egy-egy tagú rendszer, vagyis két pont akkor kongruens, ha összeesik.*

Ha $(A)_{2n}$ *és* $(A')_{2n}$ *két páros számú taggal biró kongruens pontrendszer, akkor az* $(A)_{2n}$ *rendszer pontjait kettesével és az* $(A')_{2n}$ *rendszer pontjait kettesével összekötő* n—n *húr két kongruens húrcsoportot képez.* Az $(A_{2i-1} A_{2i}, A_{2i} A'_{2i})_{2n}$ és $(A'_{2i} A_{2i}, A'_{2i-1} A'_{2i})_{2n}$ húrcsoportok ugyanis kongruensek, mert két kongruens pontrendszert kapcsolnak össze az $(A_{2i}, A'_{2i})_{2n}$ pontrendszerrel; de a két csoportnak az $(A_{2i} A'_{2i})_n$ húrcsoport közös: kongruensek tehát csakugyan $(A_{2i-1} A_{2i})_n$ és $(A'_{2i} A'_{2i-1})_n$ húrcsoportok is. A bebizonyitás és ezzel a tétel megfordítható: *Két kongruens húrcsoport húrjainak végpontjai két kongruens pontrendszert alkotnak.*

Könnyen belátható ebből, hogy *két* n*-tagú* $(B)_n$ *és* $(B')_n$ *pontrendszer kongruens, ha az* $(AB)_n$ *és* $(A'B')_n$ *húrcsoportok kongruen-*

sek, hol $(A)_n$ *és* $(A')_n$ *két n-tagú kongruens pontrendszer.* Az előző tétel értelmében ugyanis az $(AB)_n$ és $(A'B')_n$ húrcsoportok kongruens voltának következménye az $(A, B)_{2n}$ és $(A', B')_{2n}$ pontrendszerek kongruencziája; mivel továbbá még az $(A)_n$ és $(A')_n$ pontrendszerek is kongruensek, kongruensek a fönmaradó $(B)_n$ és $(B')_n$ pontrendszerek is. Viszont, *ha* $(A)_n$ *és* $(A')_n$, $(B)_n$ és $(B')_n$ *két pár n-tagú kongruens pontrendszer, akkor az* $(AB)_n$ *és* $(A'B')_n$ *húrcsoportok is kongruensek.*

Láttuk már, hogy két kongruens pont összeesik.

Vizsgáljuk meg, minő összefüggésben van két kongruens pontpár? Ha A_1, A_2 és B_1, B_2 a két pontpár, akkor a föntebbiekből következik, hogy az A_1A_2 és B_1B_2 húrok kongruensek, vagyis egy húrrendszerhez tartoznak. E szerint:

Két oly húr, melynek végpontjai két kongruens pontpárt képeznek, ugyanazon húrrendszerhez tartozik.

Ebből következik, hogy *két oly pontrendszer, mely csak egy-egy pontpárban különbözik, akkor és csak akkor kongruens, ha e pontpárok összekötő húrjai egy ugyanahhoz a húrrendszerhez tartoznak.* Vagy tovább menve, világos, hogy *az oly helyettesítések sorozata, melyekben két pont helyébe oly két új pontot teszünk, melynek összekötő húrja az előbbi két pontot összekötő húrral egy húrrendszerhez tartozik, egy pontrendszert egy vele kongruens pontrendszerbe visz át.* Viszont *két tetszésszerinti kongruens pontrendszer a helyettesítések ilyen sorozatával egymásba átvihető.* Ha ugyanis az $(A)_n$ pontrendszert a pontpárok ilyen helyettesítéseivel egy oly pontrendszerbe transzformáljuk, melynek egy az $(A)_n$ pontrendszerrel kongruens $(B)_n$ pontrendszerrel $n-1$ pontja közös, akkor az n-ik pont is közös, mert a transzformált rendszer $(A)_n$-nel és így $(B)_n$-nel is kongruens. A transzformáczió végtelen sokféleképen eszközölhető; tételünk bebizonyítására elégséges egy módját megadni. Helyettesítsük az A_1, A_2 pontokat a B_1, A'_2 pontokkal, hol A_1A_2 és $B_1A'_2$ egy rendszerhez tartozó húrok, az A'_2A_3 pontokat a $B_2A'_3$ pontokkal, hol az A'_2A_3 és B_2A_3 húrok ismét egy húrrendszerhez tartoznak és így tovább mindaddig, míg $n-1$ helyettesítéssel az $(A)_n$ pontrendszert a $B_1, B_2 \ldots$

B_{n-1}, A'_n rendszerbe vittük át. De ekkor, mint láttuk, $A'_n \equiv B_n$: vagyis *két kongruens pontrendszernek kongruens pontpárok helyettesítéssel egymásba való transzformácziója mindig lehetséges és véges számú lépésben eszközölhető.*

E tétel segítségével igen egyszerü összefüggést állapithatunk meg a háromtagú kongruens pontrendszerek között is. Ha ugyanis az $A_1A_2A_3$ háromszög kisérő pontja D, és az A_1, A_2, A_3 pontrendszert úgy viszszük át egy vele kongruens pontrendszerbe, hogy az A_1A_2 húrt egy vele ugyanazon húrrendszerhez tartozó $A'_1A'_2$ húrral helyettesítjük, akkor az A_1A_2 és A_3D és így az $A'_1A'_2$ és A_3D húrok is konjugáltak: az $A'_1A'_2A_3D$ négyszög síknégyszög, vagyis az $A'_1A'_2A_3$ háromszög kisérőpontja ugyancsak D. E szerint, ha valamely háromtagú pontrendszerre a föntebb definiált helyettesitést vagy ilyen helyettesitések sorozatát alkalmazzuk, vagy a mi ezzel azonos, ha a pontrendszert egy vele kongruens pontrendszerrel helyettesítjük, kisérő pontja ugyanaz marad. *Két kongruens háromtagú pontrendszer kisérő pontja* e szerint *közös*. És *viszont, ha két háromtagú pontrendszer kisérő pontja közös, akkor a két pontrendszer kongruens.* Mert ha A_1, A_2, A_3 és B_1, B_2, B_3 a két pontrendszer, melynek D kisérő pontja közös, úgy annak az $(A)_3$ rendszerrel kongruens pontrendszernek, melynek két pontja B_1 és B_2, D szintén kisérő pontja és így harmadik pontja csakugyan B_3.

Vizsgáljuk még meg a kongruens négytagú pontrendszerek összefüggését. Evidens első sorban, hogy két oly négytagú pontrendszer, melynek pontjai egy-egy síknégyszöget képeznek, kongruens; mert ha az A_1, A_2, A_3, A_4 pontok egy síkban feküsznek és $A'_1A'_2$ egy az A_1A_2 húrral egy rendszerhez tartozó húr, úgy A_1A_2 és A_3A_4 és így $A'_1A'_2$ és A_3A_4 is konjugált húrok: $A'_1A'_2A_3A_4$ tehát síknégyszög. Vagyis síknégyszög szögpontjaitól képezett pontrendszert a föntebb definiált helyettesítések sorozata hasonló pontrendszerbe visz át: *egy síknégyszöghöz kongruens pontrendszer pontjai* tehát *szintén egy síkban feküsznek és viszont két síknégyszög pontjai két kongruens pontrendszert alkotnak.*

Legyen $(A)_4$ tetszésszerint négytagú pontrendszer és $(B)_4$ egy vele kongruens pontrendszer. Jelöljük az $A_i A_j A_k$, illetőleg $B_i B_j B_k$ háromszögek kisérő pontjait A_{ijk}-val, ill. B_{ijk}-val, akkor az A_1, A_2, A_3, A_{123} és B_1, B_2, B_3, B_{123} sík pontrendszerek kongruensek, kongruensek tehát az A_1, A_2, A_3, A_{123}, B_1, B_2, B_3, B_4 és A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_{123} pontrendszerek és így az A_{123}, B_4 és A_4, B_{123} pontrendszerek is: a $B_4 A_{123}$ és $A_4 B_{123}$ húrok ugyanazon húrrendszerhez tartoznak: ennélfogva A_4-et A_{123}-ba és B_4-et B_{123}-ba ugyanazon Q transzformáczió viszi át. Ugyanezen transzformáczió viszi át A_1-et A_{234}-be s í. t.; mert hiszen az A_1, A_2, A_3, A_4 pontrendszer önönmagának minden elrendezésével kongruens. Viszont, ha $(A)_4$ és $(B)_4$ olyan pontrendszerek, melyekre nézve e föntebb definiált Q-transzformáczió közös, a két rendszer kongruens, mert $B_4 A_{123}$ és $A_4 B_{123}$ húrok egy húrrendszerhez tartozván, kongruensek az A_{123}, B_4 és A_4, B_{123}, tehát az A_1, A_2, A_3, A_{123}, B_1, B_2, B_3, B_4 és A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_{123} pontrendszerek és így végre az A_1, A_2, A_3, A_4 és B_1, B_2, B_3, B_4 pontrendszerek is. Az így definiált Q-transzformáczió ennélfogva kongruenczia szempontjából *a négyes pontrendszer jellemző Q-transzformácziójának* nevezhető.

Ismeretes, hogy egy Reye-féle pontrendszert a pontpárok föntebb jellemzett helyettesítése ismét Reye-féle rendszerbe visz át; *ha* tehát *két nyolcztagú kongruens pontrendszer közül az egyik* Reye-*féle,* Reye-*féle a másik is,* és viszont, *két* Reye-*féle pontrendszer mindig kongruens.*

*

Láttuk, hogy két kongruens pontrendszer átvihető egymásba oly helyettesitéseknek véges sorozata által, melyek két pont helyébe egy az összekötő húrral egy húrrendszerhez tartozó húr 2 végpontját teszik, és viszont, 2 ilyen módon egymásba átvihető húrrendszer kongruens. E tulajdonságot a kongruenczia fogalom definiálására is felhasználhatjuk, vele egy az eredetivel equivalens definicziót adván: *Kongruens 2 pontrendszer, ha egymásba a jellemzett helyettesítések egy sorozatával átvihető.*

Az ily alakban adott definiczió alkalmas az általánosításra. Az általánosítás úgy történik, hogy a fenti helyettesítés helyébe egy általánosabb jellegű transzformácziót vezetünk be, melynek e helyettesítés egy speciális esete.

Alakítsunk ugyanis át egy $n = 4l + k$ tagú pontrendszert (hol $0 < k \leqq 4$) egy oly vele kongruens pontrendszerbe, melynek pontjai közül $4l$ 4-enkint egy-egy síkban fekszik. Ily átalakítás mindig végezhető: a l síkot vagyis a kongruens pontrendszer $4l$ pontját, azonkívül a k pont közül $k-1$-et előre kijelölhetjük. Ha az l síkot máskép választjuk, egy más k-tagú pontrendszerre jutunk, mely az előbbivel kongruens; mert az adott pontrendszer kétféle alakításából nyert kongruens pontrendszereknek az l-l sík által képzett pontrendszerek kongruens részei és így a fenmaradt k-tagú rendszerek is kongruensek.

Ezzel a $4l + k$-tagú pontrendszereket olyan k-tagú pontrendszerekre redukáltuk, a melyek az l számmal együtt a pontrendszert kongruenczia szempontjából teljesen jellemzik. Ha tehát a kongruenczia fogalmát oda általánosítjuk, hogy kongruensnek nevezünk két pontrendszert, melynek redukáltjai az eredeti értelemben kongruensek, akkor ebben az értelemben vett kongruenczia síknégyszögeknek a pontrendszerekhez való hozzáadásával, vagy belőlük való elvételével szemben invariáns. Minthogy továbbá a fentebb definiált helyettesítés, t. i. két pont helyettesítése egy az összekötő húrral egy húrrendszerhez tartozó húr két végpontjával, lényegében egy síknégyszög hozzáadása és egy síknégyszög elvétele (az első síknégyszöget a második húr és egy hozzá konjugált húr, a másodikat ezen konjugált húr, és az eredeti húr végpontjai alkotják), azért ezen *generalizált kongruenczia fogalmat* következőkép is definiálhatjuk:

Két pontrendszer kongruens, ha síknégyszögek hozzáadása és elvétele által egyik a másikba átvihető.

Az ilykép általánosított kongruenczia-fogalom kivételes szerepet biztosít azoknak a pontrendszereknek, a melyek síknégyszögek aggregatumára vagy tovább menve, a pont hiányára redukálhatók, melyek elvétele vagy hozzáadása tehát kongruenczia szem-

pontjából nem jön tekintetbe. Az ilyen pontrendszereket, melyek egymással mindannyian kongruensek, mivel a pontrendszerek összeadásánál a zérus szerepét játszák, *nulla-rendszereknek nevezzük.*

Nulla-rendszer pl. egy Reye-féle 8-as pontrendszer.* *Két olyan pontrendszert, melyeknek összetétele nulla-rendszer, egymás maradékainak mondunk.* Evidens, hogy ha két pontrendszer egymás maradéka, úgy analog tulajdonságú két velük kongruens pontrendszer is.

Azok a tételek, melyeket a szűkebb értelemben vett kongruenczia-fogalomra találtunk, állanak az általánosított kongruencziafogalomra is. A két pontrendszer különbségére vonatkozó tétel általánosítható itt annyiban, hogy *bármely két pontrendszer különbsége képezhető, a nélkül, hogy egyik a másikat, vagy egy vele kongruens pontrendszert, eredetileg tartalmazná.* Ha ugyanis a kivonandó pontrendszert egy maradéka hozzáadása által nullarendszerre egészítjük ki, és ezen nulla-rendszert a kisebbitendő pontrendszerhez adjuk, úgy egy ezzel kongruens pontrendszert nyerünk, mely a kivonandó pontrendszert tartalmazza: ez utóbbi elvételével maradékának és a kisebbitendő pontrendszernek öszszege marad hátra és szolgáltatja a keresett különbséget. *Két pontrendszer különbsége* tehát a *kisebbítendő pontrendszernek és a kivonandó pontrendszer egy maradékának összege vagy általában egy ezzel kongruens pontrendszer.*

*

A megelőzőkben a $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$-en fekvő pontrendszerek kongruencziájának fogalmát geometriailag állapítottuk meg, kongruensnek ne-

---

* Az analitikai vizsgálatok arra az eredményre vezetnek, hogy bármely algebrai felületnek a görbével való metszésponjai az itt definiált értelemben nulla-rendszert alkotnak.

A helyzetgeometria általános algebrai felületet nem ismer és így helyzetgeometriai úton e tétel nem bizonyítható; valószinű azonban, hogy többkevesebb nehézséggel ez úton az adott tétel magasabb rendű felületek esetén is tetszésszerinti határig bővíthető. A görbe konfigurácziójának ez időszerint tárgyalt elmélete ily kibővítést nem tesz szükségessé.

vezvén két pontrendszert, ha azok a görbén fekvő síknégyszögek elvétele és hozzáadása által egymásba átvihetők. Kérdés már most, lehetséges-e e geometriai kongruencziákat arithmetikai kongruencziákkal olykép szimbolizálni, hogy két pontrendszer kongruencziájának a pontrendszereket jellemző parameterek kongruencziája feleljen meg?

A föntebb a kongruens pontrendszerek összetételére és az egyes pontrendszerek permutálhatóságára adott törvények alapján evidens, hogy a pontrendszer, mint az összeggel analog fogalom, pontjai összegének tekinthető és reá az egész műveletek alkalmazhatók, az általánosított kongruencziafogalomban csak azon kikötéssel, hogy a nulla-rendszert a 0-sal szimbolizáljuk. Ha azonban az osztás problemáját vizsgáljuk és azt kérdezzük, hogy melyik azon pont, melynek n-szerese egy adott pontrendszerrel kongruens, úgy tudjuk, hogy a problema több, pl. $n = 2$ esetén, midőn tehát az egy húrrendszerhez tartozó érintőket keressük, 4 megoldást szolgáltat. Mivel a 2-vel való osztásnak két modulusra való kongruencziánál van 4 megoldása, közelfekvő a kérdés, vajjon a föntebb definiált kongruenczia ilyen arithmetikai kongruenczia által szimbolizálható-e?

Fogalmazzuk a kérdést szabatosabban. A görbe analitikai előállítása biperiodikus függvények segítségével a görbe pontjainak következő parameteres előállítására vezet:

Válasszunk két w_1 és w_2 komplex számot tetszés szerint csupán azon megszorítással, hogy a két szám viszonya nem valós. A $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$ összes-valós és képzetes pontjai leképezhetők a komplex számsíkra olykép, hogy a modd. $2w_1$, $2w_2$ kongruens számok a görbe ugyanazon pontjának felelnek meg; e leképezésben a görbének egy algebrai felülettel való metszéspontjait az a reláczió jellemzi, hogy parametereik összege modd. $2w_1$, $2w_2$ zérussal kongruens.

Ebből következik, hogy síknégyszögek vagy általában nullarendszerek hozzáadása a pontrendszert jellemző parameterek összegére kongruenczia szempontjából befolyással nincs; vagyis a pontrendszereket jellemző parameterek összegének kongruens volta maga után vonja a pontrendszerek geometriai kongruencziáját és viszont, föltéve, hogy az összehasonlított pontrendszerek pontjainak száma mod. 4 kongruens.

Mivel a helyzetgeometria n-edrendű algebrai felületet általában nem ismer és csupán meghatározott rendű felületek vizsgálatára elégségesek eszközei, azért helyzetgeometriai úton azon tétel, hogy a $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$-nek egy tetszésszerinti algebrai felülettel való metszéspontjai nulla-rendszert alkotnak, nem bizonyítható be. Mi e tételt eddig csupán síkkal és másodrendű felülettel való metszésre ismertük fel; a vizsgálat magasabb rendű felületekre is folytatható, a nélkül azonban, hogy az általános tételre vezetne. Mi tehát csupán a kellő korlátok között, az adott helyzetgeometriai definiczió alapján fölismerhető nulla-rendszerekre szorítkozva, vetjük fel a kérdést: *Adható-e geometriai úton a $C_{\mathrm{I}}^{(4)}$ pontjainak a komplex számsíkra való olyan leképezése, a melyben a kongruens pontrendszereket az jellemzi, hogy a megfelelő parameterek öszszegei modd. $2w_1$, $2w_2$ kongruensek?*

E kérdésre itt választ nem adunk. De röviden kijelölni törekszünk ama vizsgálatok jellegét és irányát, melyekkel a kérdést megoldhatónak tartjuk.

Nevezzük 2-vel való osztásnak* azt a folyamatot, melylyel az adott húrrendszerhez tartozó érintők érintési pontjait keressük és ennek megfelelően a

$$2x \equiv h \text{ (modd. } 2w_1, 2w_2)$$

kongruenczia megoldását. A kúpos húrrendszereket, illetőleg húrjaikat az jellemzi, hogy önmagukkal konjugáltak, vagyis hogy kétszeresük nulla-rendszer, tehát parametereik a

$$2x \equiv 0 \text{ (modd. } 2w_1, 2w_2)$$

---

* Általában n-nel való osztás azon pont keresése, melynek n-szerese adott rendszerrel kongruens; arithmetikailag az n-nel való osztás az

$$n \,.\, x \equiv a \text{ (modd. } 2w_1, 2w_2)$$

kongruenczia megoldása.

kongruenczia megoldásai: 0, w_1, w_2, w_1+w_2. E húrok osztása az inflexiós pontokat, az inflexiós pontokat összekötő húrok osztása ismét újabb pontokat szolgáltat és így tovább. Általában a görbe pontjainak egy bizonyos tartományát — nevezzük a raczionális pontok tartományának — azon három tulajdonsággal definiáljuk, hogy 1. az inflexiós pontok a tartományba tartoznak, 2. a tartomány bármely 2 pontját összekötő húr osztása a tartomány 4 pontját szolgáltatja és végül 3. a tartományba nem tartozik oly pont, mely ily úton, vagyis folytatólagos összekapcsolás és osztás által inflexiós pontokból nem származtatható. Evidens, hogy a tartománynak azon parameterek (a raczionális parameterek) tartománya felel meg, melyek a 0-ból 2-vel való osztás és összeadás által folytatólagosan képezhetők.

Első sorban szükséges törvény annak megállapitására, hogy az osztás eredményét képező 4 pontnak minő rendben felelnek meg a megfelelő kongruenczia gyökei;* e törvénynek nem szabad ellenmondásban lennie azzal a tétellel, hogy egy sík pontjainak megfelelő parameterek összege zerussal kongruens.

Megvizsgálandó, vajjon a görbe többi pontjai definiálhatók-e és mi módon a raczionális pontokkal szétválasztás vagy egyéb határfolyamat segitségével. Van-e az ennek megfelelő arithmetikai határfolyamatnak eredménye? Ha igen, olyan-e ezen határfolyamat, hogy a geometriai és arithmetikai kongruencziák megfelelését fenntartja? Ha mind e kérdésekre igenlő a fe-

---

* Elvi tekintetben mintául szolgálhat itt STAUDT eljárása, melylyel a képzetes elemet az egyenes geometriájába bevezeti; formális szempontból azonban valószinűleg lényeges eltérést és nehézséget okoz itt az a körülmény, hogy a $C_I^{(4)}$-en föllépő pont-involucziók (projicziálások) sokasága csak egy-dimenziós, és hogy ezen involucziók kettős pontjainak száma 4, oly értelemben, hogy 4 a valós kettőspontok maximális száma, míg az egyenesen csak 2, minek folytán utóbbin a generalizáczió a 2-féle *értelem (Sinn)* bevezetése által eszközölhető.

Lehetséges még, hogy sikerül a valós pontok kiválasztása által egy egyelőre csak ezekre definiált (esetleg több a görbe realitási viszonyai szerint különböző) koordináta-megállapodást létesiteni, mely a fönti követelményeknek eleget tesz. Ez esetben természetesen a parametereknek egy 1-dimenzios sokasága fog szerepelni.

lelet, úgy a geometriai határfolyamattal definiált pontoknak az arithmetikai folyamattal definiált számokat feleltetvén meg, a görbe pontjainak keresett analitikai előállítását nyerjük.

Ha sikerül ily módon e kérdésre válaszolnunk, úgy a geometriai és az analitikai tárgyalás e válaszban találkoznak és közös úton haladnak tovább; és oly kérdésekre, melyekre analitikai úton könnyű a felelet, míg a geometriai megoldás látszólag nehézségekbe ütközik, ezentúl az analitikai megoldás geometriai értelmezésével geometriailag is könnyű a válasz; mert az analitikai művelet a geometriai műveletnek egy geometriai nyelven olvasható szimbolumává válik.

Riesz Frigyes.

AZ ANALITIKAI MECHANIKA ALAPELVÉRŐL.

(Első közlemény.)

I. Gyakran találkozunk avval az állítással, hogy a mechanikai problemák tárgyalására nem olyan alkalmas a LAGRANGE-FOURIER elv, melyet virtuális eltolások elvének nevezhetni, mint GAUSS-nak legkisebb kényszer elve, mely voltaképen virtuális gyorsulások elve. Ez inditott volt engemet évekkel ezelőtt a kérdés megvizsgálására; vizsgálataimról szerencsém volt akkoriban a Math. és Phys. Társulatnak egy előadásomban referálni. Jelen közleményemre pedig ZEMPLÉN GYŐZŐ* tagtársunknak az az állítása indít, hogy a LAGRANGE elve a surlódással járó mozgás tárgyalására egyáltalán nem alkalmas, egy állítás, melynek indokait el nem fogadhatom.

A virtuális eltolás, sebesség és gyorsulás analitikai értelmezésén kezdem. Ha egy pont felületen kénytelen mozogni, melynek egyenlete

$$F(x, y, z, t) = 0, \tag{1}$$

akkor a tényleges sebesség komponensei között

$$\frac{\partial F}{\partial x} x' + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial z} z' + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

egyenlet áll fenn. Ha a pontnak ebben a t időpontban elfoglalt helyén az

$$x' + w_x, \quad y' + w_y, \quad z' + w_z$$

sebességkomponensek is megférnek a (2) által kifejezett kényszerrel, azaz ha

---

* Math. és Phys. Lapok 1902.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x'+w_x)+\frac{\partial F}{\partial y}(y'+w_y)+\frac{\partial F}{\partial z}(z'+w_z)+\frac{\partial F}{\partial t}=0 \qquad (3)$$

egyenlet is igaz, akkor a (2)-nek a (3)-ból való levonásával ered

$$\frac{\partial F}{\partial x}w_x+\frac{\partial F}{\partial y}w_y+\frac{\partial F}{\partial z}w_z=0. \qquad (4)$$

E (4) egyenletnek megfelelő bármelyik w_x, w_y, w_z vektor az (1) felületen mozogni kénytelen pontnak az ő *virtuális sebessége,* s a pontnak e virtuális sebességgel arányos minden eltolása avagy gyorsulása a pont virtuális eltolásának illetőleg gyorsulásának neveztetik.

Ha a pont szilárd alapon mozogva az alapot határoló felületet az egyik oldalán elhagyhatja, akkor a kényszer lényegesen más, és ehhez képest a pont virtuális sebességeinek az összessége is más. Míg ugyanis a (4) egyenlet azt mondja, hogy a $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ vektor, mely irányra azonos a felületnek x, y, z pontbeli normálisával, merőlegesen áll a w_x, w_y, w_z vektorra, addig a most mondott esetben még olyan sebességek is virtuálisak, a melyeknek az értelme a nevezett normálisnak az alaptestből kifelé mutató értelmével hegyes szöget zár be. Jelölve az x, y, z pontbeli normálissal parallel, a testből kifelé mutató vektort c_x, c_y, c_z-vel, a szilárd alapon mozgó és azt egyik oldala felé elhagyható pont virtuális sebességét a

$$c_x w_x + c_y w_y + c_z w_z \gtreqless 0 \qquad (5)$$

vonatkozás jellemzi.

II. A midőn a pont kénytelen adott felületen mozogni, vagy a midőn azt csak egyik oldalán hagyhatja el, ha ugyan elhagyja, akkor ez csak annyit jelent általánosabb fogalmazásban, hogy a mozgásnak eleve meg van adva egy első- vagy másodrendű differencziálegyenlete, mely első esetben érvényes minden időben, második esetben csak határolt (előre meg nem adott) időtartamban.

Ha az eleve megadott differencziálegyenlet elsőrendű

$$ax'+by'+cz'+d=0, \qquad (6^*)$$

vagy másodrendű

$$a_1 x'' + b_1 y'' + c_1 z'' + d_1 = 0, \qquad (6^{**})$$

és ha a, b, c, d az x, y, z, t-nek, az a_1, b_1, c_1, d_1 ezeken kívül az x', y', z'-nek is a függvényei, akkor a (6*) esetében teljesen úgy értelmezhetem a virtuális sebességet, mint az I.-ben, a (6**) esetében pedig ép úgy értelmezhetem a virtuális gyorsulást, mint I.-ben a virtuális sebességet, és evvel azután első esetben a virtuális eltolás és gyorsulás, második esetben a virtuális eltolás és sebesség is értelmezve lesznek, egymással való arányosságuk révén. Szóval az (5) vonatkozás mintájára épül ilyenkor is a kényszer, a virtuális sebesség jellemzése: a c_x, c_y, c_z helyébe első esetben a, b, c, második esetben a_1, b_1, c_1 lép. Az a, b, c, d az I.-ben tárgyalt esetben ugyanannak az F függvénynek voltak a parcziális differencziálhányadosai; lehetnek azonban úgyis megadva, hogy (6*) egyenlet egymagában nem is integrálható. Hasonló áll a (6**) egyenletről is.

III. *Akármilyen pontrendszer virtuális sebességrendszerét* még általánosabban következőképen értelmezem az (5) mintájára:

Ha a pontrendszer n számú anyagi pontból állván, mindegyik i ponthoz adva van a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} vektor, és ha a w_{ix}, w_{iy}, w_{iz} vektorok rendszere eleget tesz e k számú (egymástól lineár függetlennek föltételezett) vonatkozásnak:

$$\Phi_j \equiv \sum_1^n {}^i (a_{ij} w_{ix} + b_{ij} w_{iy} + c_{ij} w_{iz}) = \varepsilon_j , \qquad (j = 1, \ldots, k) \qquad (7)$$

hol ε_j vagy $=0$, vagy pedig pozitiv zérus határértékkel, — akár e határérték kizárásával, akár annak is a bezárásával, — akkor a w_{ix}, w_{iy}, w_{iz} *vektorok rendszere virtuális sebességrendszer.* Ha $\varepsilon_j = 0$, akkor a vonatkozás *kényszeregyenlőség*, különben *kényszeregyenlőtlenség.*

Ez értelmezés egészen független attól, hogy vannak-e eleve adva egyenletek a pontok koordinátái, sebességei stb. között vagy sem, és látni is fogunk eseteket, a mikor ilyenek nincsenek előre megadva; lényeges csak az irányadó a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} vektorok ismerete.

Az $x_i y_i z_i$ pontoknak virtuális minden olyan eltolás- vagy gyorsulásrendszere, mely a virtuális sebességek rendszerétől csak közös szorzóban különbözik.

IV. *Az analitikai mechanika alapelve, névszerint a virtuális eltolások, sebességek, gyorsulások elve* a következőben áll:

Ha a rendszer i pontját megtámadó szabad erő X_i, Y_i, Z_i vektor, és ha az i pontban m_i tömeg lévén összpontosítva, az ő gyorsulása x_i'', y_i'', z_i'' vektor, akkor mindenik w_{ix}, w_{iy}, w_{iz} $(i=1,\ldots,n)$ virtuális rendszerre nézve fennáll ez a vonatkozás:

$$A \equiv \sum_1^n {}^i [(m_i x_i'' - X_i) w_{ix} + (m_i y_i'' - Y_i) w_{iy} + (m_i z_i'' - Z_i) w_{iz}] = \varepsilon, \qquad (8)$$

hol ε vagy $=0$, vagy pozitiv.

Ha valamennyi ε_j csakis zérus lehet, akkor mindegyik w_{ix}, w_{iy}, w_{iz} $(i=1,\ldots,n)$ virtuális rendszerhez tartozik egy $-w_{ix}$, $-w_{iy}$, $-w_{iz}$ $(i=1,\ldots,n)$ szintén virtuális rendszer. Az alapelv értelmében ennélfogva nem lehet negativ sem a

$$\sum_1^n {}^i [(m_i x_i'' - X_i) w_{ix} + (m_i y_i'' - Y_i) w_{iy} + (m_i z_i'' - Z_i) w_{iz}],$$

sem pedig a második virtuális rendszer helyettesitési eredménye:

$$-\sum_1^n {}^i [(m_i x_i'' - X_i) w_{ix} + (m_i y_i'' - Y_i) w_{iy} + (m_i z_i'' - Z_i) w_{iz}];$$

következésképen ekkor $\varepsilon=0$. Szóval, ha a (7) rendszer csupa kényszeregyenlőségekből áll, akkor

$$A = 0;$$

ha azonban a (7) rendszerben kényszeregyenlőtlenségek is fordulnak elő, akkor lehet az A pozitiv is.

Lagrange-nál, ki csak kényszeregyenlőséget ismer, $A=0$; a kényszeregyenlőtlenséget Fourier hozta be, nála $A \geqq 0$. Mind a kettő csak virtuális eltolásokat használ; miután a kényszereket náluk a koordináták közötti egyenletek állapitják meg, a virtuális eltolások közelebb feküsznek; másrészről bizonyos transzformácziók végzésénél szüksége is volt Lagrange-nak e nála

δx_i, δy_i, δz_i-vel jelölt eltolásokra. De természetesen épen olyan jogosult a virtuális sebességek és gyorsulások használata. A virtuális sebességeket per analogiam $\delta x_i'$, $\delta y_i'$, $\delta z_i'$-vel és a virtuális gyorsulásokat $\delta x_i''$, $\delta y_i''$, $\delta z_i''$-vel fogom jelölni. E jelölés azért czélszerű, mert ha a véges kényszervonatkozás a (6*) mintájára van adva, akkor olyan variálásnak vetve alá a bal oldalt, melynél az x, y, z koordináták és a t változatlanok maradnak, ered

$$a\delta x' + b\delta y' + c\delta z';$$

ép úgy ha a véges kényszervonatkozás a (6**) mintájára van adva, akkor olyan variálásnak vetvén alá a baloldalt, melynél úgy a koordináták mint az idő mint az x', y', z' sebességek változatlanok maradnak, ered

$$a_1\delta x'' + b_1\delta y'' + c_1\delta z'';$$

mely kifejezések alkata azonos a (7) vonatkozásbeli

$$a_{ij}w_{ix} + b_{ij}w_{iy} + c_{ij}w_{iz}$$

kifejezések alkatával.

A szerint, a mint a (7) és (8) vonatkozásokban w_{ix}, w_{iy}, w_{iz} helyén δx_i, δy_i, δz_i, vagy $\delta x_i'$, $\delta y_i'$, $\delta z_i'$, vagy végül $\delta x_i''$, $\delta y_i''$, $\delta z_i''$ áll, e IV. elején kimondott elv a *virtuális eltolások*, a *virtuális sebességek*, vagy *virtuális gyorsulások* elve. A *virtuális gyorsulások* elvét LIPSCHITZ * mondá ki legelőször; később tőle függetlenül az amerikai GIBBS,** ki az imént nevezett három elvet egymás mellé helyezé,*** a virtuális gyorsulások elvének előnyös használhatóságát több példán megmutatá. Azt a véleményét azonban nem osztom, hogy vannak esetek, a melyek csakis ez utóbbi elvvel tárgyalhatók; a példa pedig, a melylyel e véleményét támogatá, miként rögtön meg fogom mutatni, éppen az

* Crelle Journal 82. kötet.

** American Journal 2. kötet.

*** ZEMPLÉN úrnak az az újabban is hangoztatott állítása, mintha csak a virtuális eltolások és a virtuális gyorsulások elve lett volna eddigelé ismeretes, azt mutatja, hogy GIBBS e fogalmazása figyelmét elkerülé.

ellenkező mellett tanuskodik. Tényleg az elvnek az az általános fogalmazása, a melyet az imént felállíték, mutatja már, hogy egyszerű szócserével át lehet menni az egyikről a másikra az analitikai apparatus, az egyenletek érintetlenül hagyásával: pedig ez egyenletrendszerek a fődolog, a szavak, a melyek különben is csak átmeneti segédeszközök elnevezései, nem határoznak többet, minthogy a problémához egyszer esetleg az egyik, máskor a másik nomenclatura fog jobban simulni.

Gibbs példája ez:

Tegyük fel, hogy egy különben szabad rendszerben az x-nek nem lehet negativ értéke; milyen a rendszer mozgása?

Szerintem a virtuális eltolások elve a következőket adja:

Mindig állani kell az m tömegű pontra nézve, hogy

$$A \equiv (mx''-X)\,\delta x+(my''-Y)\,\delta y+(mz''-Z)\,\delta z \gtreqless 0.$$

Az y és z számára $\delta x=0$ fölvétel révén, miután a δy és a δz akármilyen pozitiv vagy negativ érték egyaránt lehet, következik, hogy

$$my''-Y=0, \quad mz''-Z=0.$$

Két eset lehetséges: Az x értéke vagy >0, vagy $=0$.

Első eset. A míg $x>0$, addig a δx akár positiv, akár negativ lehet; téve tehát $\delta y=\delta z=0$, ered $A=0$-ból folyólag

$$mx''-X=0.$$

Második eset. Ha $x=0$ a $t=0$ időpontban, akkor ebben a δx csak positiv lehet; téve tehát $\delta y=\delta z=0$, ered

$$A \equiv (mx''-X)\,\delta x \gtreqless 0$$

vonatkozásból, hogy

$$mx''-X=\lambda,$$

hol λ zérus vagy positiv, azaz $t=0$ időpontban

$$\text{vagy } x''=\frac{X}{m}, \quad \text{vagy } x''>\frac{X}{m}\cdot$$

Már most két alesetet különböztessünk meg:

Első aleset: $x'>0$. Ekkor akármilyen kicsiny idő leteltével már az «Első eset» áll be; tehát ez alesetben

$$x''=\frac{X}{m}\cdot$$

Második aleset: $x'=0$. Ekkor $x''<0$ a példa kiszabásánál fogva nem lehetvén vagy $x''>0$ vagy pedig $x''=0$.

a) Ha $x''>0$, akkor akármilyen kicsiny idő mulva megint csak az «Első eset» állván be, megint csak

$$x''=\frac{X}{m}\cdot$$

Ekkor hát $X>0$.

b) Ha $x''=0$, akkor ebben az időpontban $\delta x>0$ lévén, megint csak annyit mondhatunk, hogy

$$mx''-X=\lambda,$$

tehát most

$$-X=\lambda,$$

hol λ vagy 0 vagy positiv. A $\lambda=0$ csakis akkor, ha az X adott értéke 0. A λ positiv pedig csakis akkor, ha X adott értéke negativ; és e positiv λ értelme a mechanika nomenclaturájában az, hogy «a $-X$ nyomás okozta kényszererő». És az $-x''$ mindaddig $=0$ marad, a míg az X positivvá nem nő. (Lásd az *a)* alatti következtetéseket.)

Gibbs a virtuális gyorsulások elve alapján tárgyalva a feladatot, ugyanerre a megoldásra jő; a megoldása csak kevésbbé részletes. Épúgy tárgyalható a feladat a virtuális sebességek elve alapján is.

V. *A mozgás differencziálegyenletei $k\leqq 3n$ számú kényszer esetén.**

---

* Arra az esetre, a midőn kényszeregyenlőtlenségek esetén $k>3n$, nem terjeszkedem ki, hanem utalok Farkas Gyula tagtárs úr értekezéseire** és Minkowsky Geometrie der Zahlen munkájára.

** Math. és Termtud. Értesítő. XII. és XVI. kötet. Math. és Phys. Lapok. V. köt. Vector-Tan sat Kolozsvár. Crelle Journal. 124. kötet.

Ha az n anyagi pontból álló rendszer (7) alatt értelmezett kényszervonatkozásai között egy sincs olyan, melynek szabad tagja ε_j zérus értéket fel nem vehet, akkor abból a megállapodásból, hogy egymástól lineár függetlenek, következik, hogy számuk k nem lehet $>3n-1$. Ha ellenben van a kényszervonatkozások között olyan is, melynek szabad tagja ε_j zérus értéket nem vehet fel, akkor $k=3n$ is lehet. Ezt előre bocsátva áll a következő

Tantétel: A szóban levő anyagi pontrendszer mozgásának ezek a differencziálegyenletei:

$$\begin{aligned} m_i x_i'' &= X+\lambda_1 a_{1i}+\cdots+\lambda_k a_{ki}, \\ m_i y_i'' &= Y+\lambda_1 b_{1i}+\cdots+\lambda_k b_{ki}, \\ m_i z_i'' &= Z+\lambda_1 c_{1i}+\cdots+\lambda_k c_{ki}. \end{aligned} \tag{9}$$
$$(i=1,\ldots,n)$$

E differencziálegyenletekben a kényszer-egyenlőtlenségek együtthatóinak λ-val jelölt szorzói nem negativok, míg a kényszeregyenlőségek együtthatóival kapcsolatos λ szorzók értéke negativ is lehet.

Bizonyítás. Jelöljük a w_{ix}, w_{iy}, w_{iz} értékeket egyszerűbben így:

$$u_1, u_2, \ldots, u_\nu; \quad (\nu=3n),$$

úgy hogy a (7) rendszer és a (8) egyenlet így lesz irandó:

$$\Phi_j \equiv \sum_{i=1}^{\nu} a_{ji} u_i = \varepsilon_j; \quad (j=1,\ldots,k) \tag{7*}$$

$$A \equiv \sum_{i=1}^{\nu} a_i u_i = \varepsilon; \quad (a_i = m_i x_i'' - X) \tag{8*}$$

és a velük æquivalensnek bebizonyitandó (9) rendszer így:

$$a_i = \lambda_1 a_{1i} + \lambda_2 a_{2i} + \cdots + \lambda_k a_{ki}, \tag{9*}$$
$$(i=1,2,3,\ldots,3n-2,3n-1,3n)$$

a) Föltéve hogy valamelyik ε_j nem lehet $=0$, lehet és legyen is $k=3n=\nu$. Akkor a (7*) egyenletrendszer megfordítása révén

$$u_j = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_{ji} \Phi_i, \qquad (j=1,\ldots,\nu) \tag{10}$$

és az u_j-knak a (8*)-ba való helyettesítésével

$$A \equiv \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_i \Phi_i \equiv \lambda_1 \Phi_1 + \cdots + \lambda_\nu \Phi_\nu = \varepsilon. \qquad (8^{**})$$

E (8**) alatti identitás jobb oldalán a Φ_j-k helyett a (7*) alatti értékeket, a bal oldalán pedig A helyett a (8*) alattit betéve ered

$$\sum_{i=1}^{\nu} a_i u_i \equiv \lambda_1 \sum_{i=1}^{\nu} a_{1i} u_i + \cdots + \lambda_\nu \sum_{i=1}^{\nu} a_{\nu i} u_i, \qquad (9^{**})$$

mely identitás a (9*) egyenletrendszerrel æquivalens lévén, csak a λ-k előjeleire vonatkozó állítás igazolandó. Ez pedig a (8**) identitás révén az ε_j-k és az ε előjelei közötti kapcsolattal történik. Ha pl. ε_1 positiv is lehet, akkor vegyük ε_1-et tehát Φ_1-et positivnak és a többi ε_j-t vagy zérusnak, vagy legalább az ε_1-hez képest elenyészőnek; akkor az alapelv szerint ε negativ nem lehet. De ebből következik, hogy a λ_1 nem lehet negativ. Evvel a λ-kra vonatkozó állítás első része be van bizonyítva. Az állítás második része nyilvánvaló; mert ha valamelyik ε_j csakis zérus lehet, akkor $\lambda_j \varepsilon_j = \lambda_j \Phi_j = 0$, akármi is a λ_j-nek az előjele.

Evvel a tétel a jelen $k=3n$ esetre be van bizonyítva.

b) Legyen $k<3n=\nu$. Akkor hozzácsatolok a k számú adott kényszervonatkozáshoz még $\nu-k$ számú, tőlük és egymástól független

$$\Phi_j \equiv \sum_{j=k+1}^{\nu} a_{ji} u_i$$

vonatkozást, minélfogva (ha $j>k$) $\Phi_j \gtreqless 0$ lehet. Evvel a tárgyalás annyiban vissza van vezetve az előbbi esetre, a mennyiben a (8**) identitás

$$A \equiv \lambda_1 \Phi_1 + \cdots + \lambda_k \Phi_k + \lambda_{k+1} \Phi_{k+1} + \cdots + \lambda_\nu \Phi_\nu \qquad (8^*)$$

most is fennáll. Csakhogy most az A nem negativ, mihelyt a

$$\Phi_1, \ldots, \Phi_k$$

valamennyien nem negativok, függetlenül attól, hogy a

$$\Phi_{k+1}, \ldots, \Phi_\nu$$

értékei mik. De ebből az következik, hogy

$$\lambda_{k+1}=\lambda_{k+2}=\cdots=\lambda_\nu=0,$$

úgy hogy

$$A\equiv\lambda_1\Phi_1+\cdots+\lambda_k\Phi_k. \tag{8**}$$

Tegyük fel ugyanis, hogy a $\Phi_1,\ldots,\Phi_k$ valamennyien elenyésző kicsiny, nem negativ értékek. Akkor a (8*) identitásból az imént elmondottak révén az következik, hogy

$$\lambda_{k+1}\Phi_{k+1}+\cdots+\lambda_\nu\Phi_\nu\geqq 0$$

tartozik lenni, bármik volnának a $\Phi_{k+1},\ldots,\Phi_\nu$ értékei. De ha $\Phi_{k+2}=\cdots=\Phi_\nu=0$-nak választatnak, akkor az imént felírt vonatkozásból a szerint, a mint Φ_{k+1} gyanánt nem positiv, avagy nem negativ értéket választok, a λ_{k+1} számára az következik, hogy nem positiv, illetve nem negativ. Marad tehát mint egyetlen lehetőség a

$$\lambda_{k+1}=0.$$

Épúgy

$$\lambda_{k+2}=\cdots=\lambda_{3n}=0.$$

A (8**) evvel be lévén igazolva, a tantétel úgy mint *a)* második részében, teljesen bebizonyítható.

VI. *Anyagi pont mozgása ellenálló közegben.* Fogjuk fel a közeg ellenállását mint olyan kényszert, mely a maga részéről a benne mozgó anyagi pont sebességét kisebbíti; e felfogás mellett a kényszer úgy fejezhető ki, hogy a v sebességi vektor negativ variáczióit követeli meg. Miután

$$v\equiv(x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\delta v\equiv\frac{x'}{v}\,\delta x'+\frac{y'}{v}\,\delta y'+\frac{z'}{v}\,\delta z',$$

tehát a kényszernek a kifejezése $\delta v<\!\!\frown 0$, a 0 határérték kizárásával, azaz

$$-\frac{x'}{v}\,\delta x'-\frac{y'}{v}\,\delta y'-\frac{z'}{v}\,\delta z'>\!\!\frown 0. \tag{10}$$

E vonatkozás a (7) mintával összehasonlítva, látni való, hogy most a w_x, w_y, w_z vektor helyén $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ virtuális sebesség, az a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}-k helyén

$$-\frac{x'}{v},\quad -\frac{y'}{v},\quad -\frac{z'}{v}$$

állnak. Miután jelen esetben csak egy kényszervonatkozás van adva, tehát a (9) egyenletrendszer alkalmazásával

$$\begin{aligned} mx'' &= X-\lambda\frac{x'}{v}, \\ my'' &= Y-\lambda\frac{y'}{v}, \\ mz'' &= Z-\lambda\frac{z'}{v} \end{aligned} \tag{11}$$

adódik, hol λ az általános tétel értelmében negativ nem lehet. Tényleg ilyen az ellenálló közegben mozgó anyagi pont mozgásának egyenletrendszere; a λ épen a közeg ellenálló ereje, melynek pontos törvénye csak kisérleti uton állapitható meg.

Ime egy példa arra, hogy adva van kényszervonatkozás (a (10)), a nélkül, hogy egyszersmind a λ meghatározására szolgáló egyenlet is eleve volna megadva.

Lehet azonban az ellenálló közeg problémáját máskép is fogalmazni. Ugyanis az eleven erőről szóló tételt mint kisérletek igazolta tényt fogadva el, adottnak tekintem az eleven erő tételét kifejező ez egyenletet:

$$\frac{dT}{dt} = Xx'+Yy'+Zz'-F'(v), \tag{12}$$

hol $F'(v)$ a v-nek egy adott, sohasem negativ, függvénye.

A (12) egyenletet így írva

$$m(x'x''+y'y''+z'z'') = Xx'+Yy'+Zz'-F'(v),$$

tekintsük az X, Y, Z erőket és az x', y', z' sebességeket nem variálandó mennyiségekül, úgy hogy belőle folyólag

$$x'\delta x''+y'\delta y''+z'\delta z''=0. \tag{12*}$$

Ez a vonatkozás a (7) mintával összehasonlitva, látni való, hogy a w_x, w_y, w_z most virtuális gyorsulások gyanánt tekintendők. Miután a (12*) kényszeregyenlet, tehát a (9) egyenletrendszer mintájára most felírt

$$mx''=X+\lambda'x', \quad my''=Y+\lambda'y', \quad mz''=Z+\lambda'z'$$

egyenletrendszerben a λ' előjele eleve nem állapitható meg. Ámde e helyett az adott (12) egyenlet megállapitja a λ'-t teljesen; ugyanis számára egyenesen

$$\lambda'(x'^2+y'^2+z'^2)=-F'(v),$$

azaz

$$\lambda'=-\frac{1}{v^2}F'(v)$$

érték következik.

VII. *Anyagi pont mozgása érdes felületen,* melyet a felület egyik oldalán el is hagyhat.

Első módszer. Miként I.-ben láttuk volt, a kényszert sima felületen az (5) egyenlőtlenség jellemzi, melyet (w_x, w_y, w_z helyébe $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ virtuális sebességeket téve) igy irhatunk

$$-c_x\delta x'-c_y\delta y'-c_z\delta z'\geqq 0. \tag{5*}$$

Az előző VI.-ban pedig láttuk volt, hogy virtuális sebességeket használván, a kényszert ellenálló közegben a (10) jellemzi. Az (5*) és a (10) összefoglalása gyanánt fejezzük ki érdes felület esetén a kényszert így:

$$c_x\delta x'+c_y\delta y'+c_z\delta z'+f\left(\frac{x'}{v}\delta x'+\frac{y'}{v}\delta y'+\frac{z'}{v}\delta z'\right)\leqq 0, \tag{13}$$

hol f, miként látni fogjuk, a súrlódás együtthatója.

[A (13) rövidített írásmódban így fejezhető ki:

$$\cos(n, \delta'v)+f\cos(v, \delta'v)\leqq 0,$$

hol n-nel az alapul szolgáló test belsejébe mutató normálisnak, v-vel a pont sebességének, végül $\delta'v$-vel annak a vektornak az értelmét jelölöm, melynek komponensei $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$].

Összehasonlítva a (13) kényszervonatkozást a (7) alatti általánossal, látni való, hogy a mozgási egyenletek most

$$mx''=X-\lambda\left(c_x+f\frac{x'}{v}\right),$$

. . . .

vagy tekintettel arra, hogy

$$c_x=\cos(n,x),\qquad c_y=\cos(n,y),\qquad c_z=\cos(n,z)$$
$$\frac{x'}{v}=\cos(v,x),\qquad \frac{y'}{v}=\cos(v,y),\qquad \frac{z'}{v}=\cos(v,z),$$

a mozgási egyenletek így írhatók:

$$\begin{aligned} mx''&=X-\lambda\big(\cos(n,x)+f\cos(v,x)\big),\\ my''&=Y-\lambda\big(\cos(n,y)+f\cos(v,y)\big),\\ mz''&=Z-\lambda\big(\cos(n,z)+f\cos(v,z)\big).\end{aligned} \tag{14}$$

Tényleg ezek az anyagi pont mozgási egyenletei érdes, szilárd, mozdulatlan felületen; λ a felület normális ellenállása, az f pedig a surlódási együttható, melynek fizikai törvényei kisérletekkel állapitandók meg, valamint némiképen meg is állapíttattak. A λ maga ismeretes úton számítható ki, ha az alapzat felszínének az egyenlete adva van; analitikai alakja* ugyanaz érdes mint sima felület esetén, t. i.

$$\lambda=P_n-m\frac{v^2}{\rho_n}, \tag{15}$$

hol ρ_n a felületnek az a főmetszetéhez tartozó görbületsugár, a mely a pontban vont sebességi vektoron átmegy, és hol ρ_n positiv, ha a görbületi középpont a positiv n normálison fekszik, míg

$$P_n=X\cos(n,x)+Y\cos(n,y)+Z\cos(n,z). \tag{15*}$$

Végül abból, hogy a λ (miként megmutattuk volt) szükségképen nem negativ, valameddig csak az egyenlőtlenségi kényszer fennáll, az következik, hogy az anyagi pont a felületet elhagyja, mihelyt olyan helyre ér, a hol útját folytatva

$$P_n< m\frac{v^2}{\rho_n}.$$

* Fröhlich, Dynamika, 94. l.

Második módszer. Fejezzük ki az adott felületen vagy annak egyik oldalán való maradás felvételét

$$-c_x\delta x''-c_y\delta y''-c_z\delta z''\geqq 0 \tag{5**}$$

alakban, mely az (5)-ből a $w_x=-\delta x''$, $w_y=-\delta y''$, $w_z=-\delta z''$ helyettesítés révén ered; hasonlóképen fejezzük az ellenállás kényszerét a (10)-ből hasonló helyettesítés révén eredő

$$-\frac{x'}{v}\delta x''-\frac{y'}{v}\delta y''-\frac{z'}{v}\delta z''\gtrsim 0 \tag{16}$$

vonatkozással.

Az (5**), (16) és a mechanikai alapelvnek Gauss-Lipschitz-Gibbs-féle alakjából az következik tehát, hogy a mozgásegyenletek:

$$\begin{aligned} mx''&=X-\lambda_1 c_x-\lambda_2\frac{x'}{v}, \\ my''&=Y-\lambda_1 c_y-\lambda_2\frac{y'}{v}, \\ mz''&=Z-\lambda_1 c_z-\lambda_2\frac{z'}{v}, \end{aligned} \tag{17}$$

hol λ_1 és λ_2 nem negativok.

A λ_1 számára ebből az egyenletrendszerből és az adott felület egyenleteiből most is (l. (15) alatt) az következik, hogy addig, a míg az anyagi pont az adott felületen mozog

$$\lambda_1=P_n-m\frac{v^2}{\rho_n}.$$

De a λ_2 meghatározására nézve a præmissákból nem következtethetünk a mechanikai alapelvből semmit sem. Ez természetes. Mert hiszen a (16) vonatkozás az ellenállás kényszerét fejezi ki, tekintet nélkül arra, hogy közeg ellenállása avagy surlódás-e az oka. Ennélfogva a λ_2 törvénye is más lesz az egyik, más a másik esetben, és mind a két esetben tapasztalati alapon határozandó meg. Ha elfogadom Coulomb törvényét, mely szerint a surlódási erő arányos a nyomással, akkor

$$\lambda_2=f\lambda$$

fejezvén ki e törvényt, a (17) egyenletek azonosakká válnak a (14) alattiakkal.

VIII. *Anyagi pont mozgása érdes nyugvó pályán*, melyet esetleg bizonyos szögleten belöl elhagyhat. Ez a probléma megoldása nem egyértékűleg határozott, hanem attól függ, hogy az anyagi pontot az érdes pályán tényleg milyen eszközök segélyével vezetjük. Ha a pont egy homogén gömbnek a súlypontja, mely gömböt egy szilárd cső mentén annak belsejében indítunk útnak, akkor a mozgás egészen más, mint a mikor a gömböt egy vályú mentén hozzuk mozgásba, melynek két oldalfala egymást a szóban levő pályához párhuzamos görbében metszi; sőt tovább menve általánosabban úgy mondható ki az eredmény, hogy a mozgás a két oldalfal kölcsönös hajlásszögétől is függ. Foglalkozzunk elébb avval az esettel, a midőn az anyagi pont mind a két vezető oldalfelületre gyakorolván nyomást* a két nyomás egyenlő módon szerepel a mozgási egyenletekben.

Első módszer. Ez esetben a vezető oldalfelületek mindegyike szolgáltat külön-külön egy-egy kényszervonatkozást a (13) mintájára, úgy hogy

$$c_{ix}\delta x' + c_{iy}\delta y' + c_{iz}\delta z' + f_i\left(\frac{x'}{v}\delta x' + \frac{y'}{v}\delta y' + \frac{z'}{v}\delta z'\right) \leqq 0, \quad (i=1,2) \tag{19}$$

hol c_{1x}, c_{1y}, c_{1z}; c_{2x}, c_{2y}, c_{2z} a két felület normálisainak az iránykoszinusait, f_1, f_2 azok surlódási együtthatóit jelölik. A virtuális sebességek elvéből adódó mozgási egyenletek rendszere tehát ez:

$$\begin{aligned} mx'' &= X - \lambda_1 c_{1x} - \lambda_2 c_{2x} - (f_1\lambda_1 + f_2\lambda_2)\frac{x'}{v}, \\ my'' &= Y - \lambda_1 c_{1y} - \lambda_2 c_{2y} - (f_1\lambda_1 + f_2\lambda_2)\frac{y'}{v}, \\ mz'' &= Z - \lambda_1 c_{1z} - \lambda_2 c_{2z} - (f_1\lambda_1 + f_2\lambda_2)\frac{z'}{v}, \end{aligned} \tag{18}$$

hol λ_1 és λ_2 nem negativ értékek. Ezek kiszámitására ugyanazok az egyenletek adódnak érdes mint sima felületek esetén.

---

* A. Mayer Berichte d. k. sächs. Wiss. Ges. Bd. 51, pag. 224.

Ugyanis a pont sebessége állandóan merőleges lévén a két vezető felület normálisaira,

$$x'c_{ix}+y'c_{iy}+z'c_{iz}=0, \quad {\scriptstyle (i=1,\,2)} \tag{19'}$$

és ez egyenletek differencziálása révén

$$x''c_{ix}+y''c_{iy}+z''c_{iz}+x'c'_{ix}+y'c'_{iy}+z'c'_{iz}=0. \quad {\scriptstyle (i=1,\,2)} \tag{19''}$$

Behelyettesítve a (18) egyenletrendszerből x'', y'', z'' értékeit, lesz tehát a (19) tekintetbe vételével (n_i-vel a normálist jelölvén)

$$\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2\cos(n_1, n_2)&=m(x'c'_{1x}+y'c'_{1y}+z'c'_{1z})+Xc_{1x}+Yc_{1y}+Zc_{1z},\\ \lambda_1\cos(n_1, n_2)+\lambda_2&=m(x'c'_{2x}+y'c'_{2y}+z'c'_{2z})+Xc_{2x}+Yc_{2y}+Zc_{2z},\end{aligned} \tag{20}$$

mely egyenletek a surlódási együtthatóktól teljesen függetlenek lévén, az állítás igazolva van. A (20) egyenletrendszerből az is látható, hogy λ_1 és λ_2 értékei az oldalfelületek normálisainak az irányától is függnek.

Ha $n_1 \perp n_2$, akkor

$$\lambda_i=Xc_{ix}+Yc_{iy}+Zc_{iz}+m(x'c'_{ix}+y'c'_{iy}+z'c'_{iz}),$$

azaz

$$\lambda_i=P_{n_i}-m\frac{v^2}{\rho_{n_i}}, \quad {\scriptstyle (i=1,\,2)} \tag{20*}$$

hol a jelölések a (15) egyenletbeliekkel analogok.

Tekintettel a (19) egyenletekre, közvetetlenül azt találjuk a (18) mozgási egyenletekből, hogy

$$\frac{dT}{dt}=Xx'+Yy'+Zz'-(f_1\lambda_1+f_2\lambda_2)v, \tag{21}$$

mely egyenlet az eleven erőről szóló tételnek a kifejezése; a jobb oldali negativ tag a surlódási erők munkája.

Ha a gömb nem érintené valamelyik oldalfelületet, vagy ha érintés esetén a sebesség nem volna || hozzá, vagy pedig ha az illető $P_{n_i}-m\frac{v^2}{\rho_{n_i}}$ értéke nem volna positiv, akkor az illető i indexhez tartozó a (19') és (19'') egyenletek közül nem jő tekintetbe;

úgy hogy ha például az illető $i=2$, akkor a mozgási egyenletek ezek:

$$\begin{aligned} mx'' &= X-\lambda_1 c_{1x}-f_1\lambda_1\frac{x'}{v}, \\ my'' &= Y-\lambda_1 c_{1y}-f_1\lambda_2\frac{y'}{v}, \\ mz'' &= Z-\lambda_1 c_{1z}-f_1\lambda_1\frac{z'}{v}, \end{aligned} \tag{18*}$$

melyekhez mint negyedik egyenlet a (19″) alattiak közül jő

$$x''c_{1x}+y''c_{1y}+z''c_{1z}+x'c'_{1x}+y'c'_{1y}+z'c'_{1z}=0,$$

minélfogva a λ_1 meghatározására ez adódik

$$-\lambda_1+m(x'c'_{1x}+y'c'_{1y}+z'c'_{1z})+Xc_{1x}+Yc_{1y}+Zc_{1z}=0,$$

azaz

$$\lambda_1=P_{n_1}-m\frac{v^2}{\rho_{n_1}}. \tag{20'}$$

A (21) egyenlet helyébe ekkor

$$\frac{dT}{dt}=Xx'+Yy'+Zz'-f\lambda v \tag{21*}$$

lépne.

Ha a gömb az 1 oldalfelületet se érintené, vagy ha érintés esetén a sebessége nem volna || hozzá, vagy pedig ha $P_{n1}-m\frac{v^2}{\rho_{n_1}}$ értéke nem volna positiv, akkor ez jel volna arra, hogy az 1 oldalfelület se gyakorol befolyást a mozgásra, minélfogva a gömb középpontjának a gyorsulását

$$mx''=X,\quad my''=Y,\quad mz''=Z$$

határoznák meg.

Ha végül n_1 nem $\perp n_2$, akkor a (20*) alatt a jobb oldalon álló értékeket (λ_i)-vel jelölve a (20) így írható:

$$\begin{aligned} \lambda_1+\lambda_2\cos(n_1, n_2) &= (\lambda_1), \\ \lambda_1\cos(n_1, n_2)+\lambda_2 &= (\lambda_2). \end{aligned}$$

Megoldva az egyenletrendszert, a λ_1 és λ_2 az illető oldalfelületekre gyakorolt nyomást adják, ha úgy $(\lambda_1)>(\lambda_2)\cos(n_1, n_2)$ mint

$(\lambda_2) > (\lambda_1) \cos(n_1, n_2)$. Ha ellenben valamelyik az egyenlőtlenségek közül pl. a 2-ik nem teljesül, akkor ez jele annak, hogy a 2 indexnek megfelelő felület nem gyakorolván a mozgásra befolyást, a mozgási egyenletek ép úgy mint előbb a (18*) alattiak, hol λ_1 értékét a (20′) egyenlet szolgáltatja. Ugyanez áll akkor is, ha a gömb nem érintené a 2 oldalfelületet, vagy ha a gömb középpontjának a sebessége nem volna || a 2 oldalfelülethez, ellenben érintené az 1 oldalfelületet és a gömb sebessége || volna az 1 oldalfelülethez. A további is ép úgy határozódik meg, mint a midőn $n_1 \perp n_2$.

Második módszer. Az adott felületek között maradás kényszerét az (5**) alakban fejezvén ki, vegyük ezekhez hozzá az ell nállásnak a (10) mintája szerint való kifejezését avval a különbséggel, hogy $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ helyett $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$-t irunk; és követeljük, hogy az összehasonlitási körben az

$$(mx'' - X)\,\delta x'' + (my'' - Y)\,\delta y'' + (mz'' - Z)\,\delta z''$$

ne legyen negativ.

Ebből a követelésből az V.-beli alaptétel révén

$$mx'' = X - \lambda_1 c_{1x} - \lambda_2 c_{2x} - \lambda_3 x',$$
$$my'' = Y - \lambda_1 c_{1y} - \lambda_2 c_{2y} - \lambda_3 y',$$
$$mz'' = Z - \lambda_1 c_{1z} - \lambda_2 c_{2z} - \lambda_3 z',$$

hol λ_1, λ_2 és λ_3 nem negativok. Ha felteszszük, hogy a (19′) és a (19″) egyenletek is érvényesek, akkor épúgy határozódnak meg a λ_1 és λ_2 mint előbb, és a rájuk vonatkozó többi vizsgálatok, valamint összes számitási eredmények is változatlanul maradnak. Ellenben a λ_3-nak a λ_1 és λ_2-vel való összefüggésére nézve külön hipothézishez kell folyamodnunk, mert az itt felvett kényszervonatkozások mellett a mechanikai alapelvből erre nézve semmi se következik.

IX. Miként III.-ban kiemelém, a virtuális eltolások, sebességek és gyorsulások elvei egymástól csak nomenclatura dolgában különböznek, minélfogva egyik problémánál az egyik, másiknál a másik simul jobban hozzá a problemában fellépő mechanikai mennyiségekhez, de ha megvan a kényszervonatkozás az egyik elv szavaiban, egyszerű szócserével megnyerjük a vonatkozást a másik nomenclaturás elv szavaiban.

Igy például az érdes felületen mozgó anyagi pont esetén a virtuális eltolások nomenclaturájában a kényszerfeltétel *

$$\left(c_{1x}+f\frac{x'}{v}\right)\delta x+\left(c_{1y}+f\frac{y'}{v}\right)\delta y+\left(c_{1z}+f\frac{z'}{v}\right)\delta z\leqq 0, \quad (22)$$

mely a (13) alattitól csak abban különbözik, kogy a virtuális sebességek helyén a virtuális eltolások állanak.

A virtuális gyorsulások nomenclaturájában pedig az érdes felületek kényszerfeltétele

$$\left(c_{1x}+f\frac{x'}{v}\right)\delta x''+\left(c_{1y}+f\frac{y'}{v}\right)\delta y''+\left(c_{1z}+f\frac{z'}{v}\right)\delta z''\leqq 0,$$

mely egyenlet egyszerübb alakot ölt fel, ha a δ jellel olyan variácziót jelölök, a mely csak a gyorsulásokat változtatja. A kényszerfeltétel ugyanis így írható:

$$\delta\left(\frac{d^2F}{dt^2}+fv\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}\right)\leqq 0,$$

hol

$$F(x, y, z)=0$$

a szóban levő felület egyenlete.

A mechanikai alapelv a megfelelő nomenclaturában kifejezve és a problemára alkalmazva, nyilvánvaló, mindig egy ugyanazon mozgási egyenletekre és a kényszererőknek egyugyanazon meghatározására vezet. A kényszereknek ez az értelmezése tehát olyan, hogy mellette a mechanikai alapelv egymagában minden további tapasztalati törvény hozzávonása nélkül megadja a mozgás helyes leirását.

Evvel ellentétben a VII. es VIII.-ban részletezett második módszernél a kényszereknek olyan értelmezésével történt a moz-

---

* Appel Compt. Rend. 1892.
Farkas Gyula. Értesítő, Kolozsvár, 1895.

gásnak az alapelvből kifolyó leírása, a mely mellett még egy új tapasztalati törvény hozzávonása vált szükségessé a leírás helyes megállapitására. A kényszereknek ez a második értelmezése tehát kevésbbé jó, kevésbbé czélszerű mint az első.

Hozzáteszem még, hogy ZEMPLÉN úrnak a surlódási kényszerre vonatkozó értelmezése ugyanabban a hiányban szenved, mint e második módszer alatt megadott.

X. Rátérek ZEMPLÉN úr 1903 októberi czikkére, melyben bizonyitani törekszik, hogy a Lagrange-elv a surlódással járó mozgás leírására akkor sem alkalmas, ha a kényszervonatkozás a sebességtől is függ.

Első megjegyzésem az, hogy a surlódási kényszert kifejező (22) alatti APPEL-től és FARKAS GYULÁ-tól eredő vonatkozásban a baloldal természetesen nem teljes variácziója semmiféle függvénynek sem. ZEMPLÉN úr e bizonyitása tehát voltaképen nem illeti a surlódás problemáját; de mindenesetre nagyon érdemesek a felvetett kérdések tisztázásra magukban véve is.

Két kérdés tisztázásán mulik az egész.

Első kérdés. Ha az

$$F(x, y, z) = \text{const.}\,; \quad \delta F(x, y, z) = 0 \tag{I}$$

föltételi egyenletek helyébe

$$\frac{dF(x, y, z)}{dt} = 0\,; \quad \delta\frac{dF(x, y, z)}{dt} = 0 \tag{II}$$

föltételi egyenleteket teszek, miben kell még megállapodnom arra nézve, hogy a Lagrange-elv fogalmazása még ekkor is

$$(mx'' - X)\,\delta x + (my'' - Y)\,\delta y + (mz'' - Z)\,\delta z = 0 \tag{III}$$

legyen?

Miután a (II) esetén, c-vel integrál állandót jelölvén

$$\delta F \equiv \frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z = c, \tag{II*}$$

ez az egyenlet pedig csak úgy vezet az

$$mx'' - X = \lambda\frac{\partial F}{\partial x}\,; \quad my'' - Y = \lambda\frac{\partial F}{\partial y}\,; \quad mz'' - Z = \lambda\frac{\partial F}{\partial z}$$

helyes mechanikai egyenletekre, ha $c=0$, tehát a kitűzött czél elérésére ennek megfelelő megállapodásokat kell bevezetnem.

Megállapodom abban, hogy δx, δy, δz kezdőértékeiül a zérus értéket választom; ugyanezt fogom tenni akkor is, ha a $\frac{dF}{dt}=0$ *helyébe úgy mint* Zemplén *úrnál az általános*

$$\varphi(x, y, z, x', y', z')=0$$

lép.

Második kérdés. Ha feltételi egyenletül példakép

$$\varphi \equiv \tfrac{1}{2} m(x'^2+y'^2+z'^2)+U=\text{const.} \tag{IV}$$

egyenletet választom, hol U a potentiál, úgy hogy

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y=\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z=\frac{\partial U}{\partial z}=0, \tag{V}$$

akkor, ha megkövetelem, hogy a (III) igaz legyen mindazok a δx, δy, δz-k esetén, melyek 0 kezdőértékből kiindulva a (IV) egyenletnek megfelelnek, vezet-e ez a követelés belső ellenmondásra?

Miután az (V)-ből folyólag a (III) így szól:

$$m(x''\delta x+y''\delta y+z''\delta z)-\delta U=0; \tag{III*}$$

miután más részről a (IV)-ből folyólag

$$\delta\varphi \equiv \frac{d}{dt} m(x'\delta x+y'\delta y+z'\delta z)+\delta U-m(x''\delta x+y''\delta y+z''\delta z)=0,$$

mely egyenlet a (III*) révén

$$\frac{d}{dt} m(x'\delta x+y'dy+z'\delta z)=0,$$

tehát ez egyenlet a $\delta x, \delta y, \delta z$ kezdőértékére vonatkozó megállapodásnál fogva

$$x'\delta x+y'\delta y+z'\delta z=0 \tag{IV*}$$

egyenletbe megy át.

A (III*) és (IV*) egyenleteknek tehát egymás következményeinek kell lenniök, minélfogva a mozgásegyenletek alakja

$$\begin{aligned} mx'' - \frac{\partial U}{\partial x} &= \lambda m x', \\ my'' - \frac{\partial U}{\partial y} &= \lambda m y', \\ mz'' - \frac{\partial U}{\partial z} &= \lambda m z'. \end{aligned} \qquad \text{(VI)}$$

A λ meghatározására végül a (IV)-ből eredő

$$\frac{d\varphi}{dt} \equiv m(x'x''+y'y''+z'z'') + \frac{dU}{dt} = 0$$

szolgál, mely egyenletből a (VI) mozgási egyenletek felhasználásával

$$\lambda T + \frac{dU}{dt} = 0,$$

és a (IV) révén

$$\lambda = \frac{d}{dt} \log.\, \text{nat.}\, T \qquad \text{(VI*)}$$

ered. *Belső ellenmondás nincs sehol.*

Evvel az egyszerű példával, úgy vélem, *eléggé megmutattam, hogy a δx, δy, δz kezdőértékére vonatkozó természetszerű megállapodás után a Lagrange mechanikai alapelve a*

$$\varphi(x, y, z, x', y', z') = 0, \quad \delta\varphi(x, y, z, x', y', z') = 0$$

alakú kényszerfeltételek mellett csak kivételes esetben vonhatja maga után az eleven erőről szóló tételnek a fennállását.

Az a további kérdés, hogy ilyen alakú kényszerfeltételek általánosan milyen mozgást határoznak meg, igen érdekes vizsgálatokra vezet ugyan, de jelen dolgozat czéljától távol fekszik; azért nem bocsátkozom belé, és az imént tárgyalt kérdésekkel kapcsolatos e következő megjegyzéssel zárom be e közleményemet:

Ha az anyagi pontra működő erőnek potencziálja van, és a pont érdes felületen kénytelen mozogni, akkor a δx, δy, δz variácziókra vonatkozó kényszer

$$\frac{d}{dt}\frac{mv\delta F}{f\Phi} + \delta(T+U) = 0 \qquad \text{(VII)}$$

alakban fejezhető ki, hol

$$\Phi = \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ugyanis a Lagrange elve, miként (III*)-ból ismeretes transformácziók révén foly, így irható:

$$\frac{d}{dt} m (x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z) - \delta (T + U) = 0.$$

A $\delta (T + U)$ ebből vett értéke a (VII)-be téve

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v \delta F}{f \Phi} + x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z \right) = 0$$

ered, mely egyenlet a δx, δy, δz kezdő értékére vonatkozó megállapodásnál fogva

$$\frac{\delta F}{\Phi} + \frac{f(x'\delta x + y'\delta y + z'\delta z)}{v} = 0$$

egyenlettel egyenértékű. Ez egyenlet pedig azonos a (22) alattival.

Ha a kényszer (VII) alatti alakjában az $=$ jel helyébe $\leqq$ jelet teszünk, az így nyert vonatkozás az anyagi pontnak az érdes felület egyik oldalán való mozgását jellemzi.

Réthy Mór.

RADIOAKTIV ANYAGOKRA VONATKOZÓ VIZSGÁLATOK.*

(Első közlemény.)

BEVEZETÉS.

E dolgozat czélja ama vizsgálatok ismertetése, a melyeket több mint négy esztendő óta a radioaktiv anyagokon végzek. E vizsgálatokat a Becquerel által felfedezett urániumsugárzás tanulmányozásával kezdtem. Az elért eredmények oly érdekes irányba látszottak terelődni, hogy Curie úr, félbeszakítva folyamatban lévő munkálatait hozzám csatlakozott s azóta egyesült erővel törekedtünk az új radioaktiv anyagok kiválasztására és tanulmányozásuk folytatására.

Kezdettől fogva kívánatosnak láttuk azt, hogy az általunk felfedezett és készített anyagokból mintákat küldjünk egyes fizikusoknak, első sorban Becquerel-nek, az urániumsugarak felfedezőjének. Így magunk mozdítottuk elő másoknak az új radioaktiv anyagokra vonatkozó vizsgálatait. Miután első dolgozataink már megjelentek, Giesel Németországban szintén ezen anyagok előállításához látott s több német tudósnak küldött belőlük. Ezen anyagokat később Franczia- és Németországban árúba bocsátották s e fontosságában napról-napra gyarapodó kérdés egész tudományos mozgalmat indított meg, úgy hogy már számos a radioaktiv anyagokra vonatkozó tanulmány látott napvilágot s napról-napra újak jelennek meg, főleg külföldön. A különféle franczia és

* Sklodowska Curie asszony doktori értekezésének második kiadása; a franczia eredetiből való fordítás a szerző felhatalmazásával jelenik meg.
A fordító.

német munkálatok eredményei a dolog természete szerint gyakori ellenmondásban vannak egymással, mint minden új és kialakulófélben lévő tárgynál. A kérdés állása, mondhatnám, egy napról a másikra megváltozik.

Kémiai szempontból azonban egy tény véglegesen megállapitottnak mondható: *egy új, erősen radioaktiv elemnek, a rádiumnak létezése*. A tiszta rádiumklorid előállitása s a rádium atómsúlyának megállapitása képezik személyes munkálkodásomnak legfontosabb részét. Ez által a ma ismert egyszerű testek sorát egy új, igen különös tulajdonságokkal felruházott egyszerű testtel megtoldottam s egyúttal megállapitottam és igazoltam a kémiai kutatásoknak egy új modszerét. Épen ez a módszer, mely az anyag atómikus tulajdonságának tekintett radioaktivitáson alapszik, tette lehetségessé CURIE-nek és nekem a rádium létezésének felfedezését.

Míg kémiai szempontból az általunk kezdetben felvetett kérdést elintézettnek tekinthetjük, addig a radioaktiv anyagok fizikai sajátságainak tanulmányozása most van teljes fejlődésében. Nehány fontos tény már meg van állapitva, de a következtetések nagy része még ideiglenes jellegű. Nem fogunk ezen csudálkozni, ha elgondoljuk, hogy a radioaktivitás hány jelenség együttes fellépését okozza és mennyire eltérő módon viselkednek a különböző radioaktiv anyagok. Több fizikusnak ezen anyagokra vonatkozó vizsgálatai minduntalan ellentétbe jutnak egymással. Bár e dolgozat határozott czéljának megfelelni óhajtván, főleg a saját vizsgálataim ismertetésére törekedtem, mégis kénytelen voltam más munkálatok eredményeire is kiterjeszkedni, a melyeknek ismerete nélkülözhetetlen.

Különben is szándékom volt e munkával egy összefoglaló értekezést összeállitani, a mely a kérdés mai állásáról számol be.

Vizsgálataimat Páris városának ipari fizikai és kémiai iskolájának laboratóriumában végeztem, SCHÜTZENBERGER úrnak, ezen iskola néhai igazgatójának és LAUTH úrnak, az ez idei igazgatónak engedelmével. Megragadom az alkalmat, hogy igaz hálámnak adjak kifejezést ama jóakaró vendéglátásáért, melyben ezen iskolánál részesültem.

A kérdés története.

A radioaktivitás jelenségeinek felfedzése ama vizsgálatokhoz csatlakozik, a melyeket a Röntgen-sugarak felfedezése óta a foszforeszkáló és fluoreszkáló anyagok fotografáló hatására vonatkozólag végeztek.

Az első csövek, melyekkel Röntgen-sugarakat állítottak elő, nem voltak fém antikatóddal ellátva. A Röntgen-sugarak forrása az üvegfal volt, melybe a katódsugarak ütköztek: ezalatt ez az üvegfal élénken fluoreszkált. Az a kérdés merülhetett akkor fel, vajjon a Röntgen-sugarak kibocsátása nem szükségképpen kiséri-e a fluoreszkálást, bármi legyen is ez utóbbinak oka. Ezt a gondolatot legelőször Henri Poincarè mondta ki.[1]

Nemsokára Henry közzétette, hogy foszforeszkáló czinkszulfid segitségével fekete papiron keresztül fotografikus behatásokat kapott.[2] Niewenglowsky ugyanazt a jelenséget hozta létre fénynek kitett kalciumszulfiddal.[3] Végre Troost erős fotografikus benyomásokat kapott a foszforeszkáló mesterséges hexagonális «blende»-vel egy fekete papir és egy vastag keménypapiron át.[4]

E tapasztalatok igazolása nem sikerült, bár ez irányban számos kisérlet történt. Nem tekinthető tehát bebizonyitottnak az a jelenség, hogy a czinkszulfid és kalcziumszulfid a fény behatása alatt láthatatlan sugarak kibocsátására képesek a melyek áthatolnak a fekete papiron s nyomot hagynak a fotografikus lemezen.

Becquerel hasonló kisérletek végzett urániumsókkal, a melyek közt fluoreszkálók is akadnak.[5] Fekete papiron át fotografikus benyomásokat állított elő az uranil és natrium kettős szulfátjával.

Becquerel eleinte azt hitte, hogy e fluoreszkáló só ép úgy

---

1 Revue générale des Sciences, 1896 január 30.
2 Comptes rendus, CXXII. k., 312. lap.
3 Comptes rendus, CXXII. k., 386. lap.
4 Comptes rendus, CXXII. k., 564. lap.
5 Comptes rendus, 1896. évf. (több értekezés).

viselkedik, mint a czink- és kalcziumszulfid HENRY NIEWENGLOWSKY és TROOST kisérleteiben. A kisérletek folyamán azonban kiderült, hogy a megfigyelt jelenség egyáltalában nincs a fluoreszkáláshoz kötve. Nem szükséges, hogy a sót megvilágítsuk; sőt az uránium és összes vegyületei akár fluoreszkálnak, akár nem, egyformán viselkednek s a legnagyobb hatása a fémuráníumnak van. Később azt találta BECQUEREL, hogy ezen anyagok teljes sötétségben éveken át benyomásokat hagynak a fotografikus lemezen fekete papiron keresztül. BECQUEREL föltette, hogy az uránium és vegyületei bizonyos különleges sugarakat: *urániumsugarakat* bocsátanak ki. Bebizonyította, hogy e sugarak vékony fémlapon keresztül tudnak haladni és kisütik az elektromossággal töltött testeket. Oly kisérleteket is végzett, a melyekből arra következtetett, hogy az uránium-sugarak visszaverődést, törést és polározódást szenvednek.

Más fizikusok (ELSTER és GEITEL, lord KELVIN, SCHMIDT, RUTHERFORD, BEATTIE és SMOLUCHOWSKY) vizsgálatai megerősítették és kiterjesztették BECQUEREL kutatásainak eredményeit az urániumsugarak visszaverődésére, törésére és polározódására vonatkozó tapasztalatai kivételével, az urániumsugarak ugyanis e tekintetben — a mint azt előbb RUTHERFORD később maga BECQUEREL is felismerte — ép úgy viselkednek mint a Röntgen-sugarak.

I. FEJEZET.

Az uránium és thórium radioaktivitása. Radioaktiv ásványok.

A Becquerel-sugarak. A BECQUEREL fölfedezte urániumsugarak fény jelenléte nélkül benyomást gyakorolnak a fotografikus lemezre; minden szilárd, folyós és gáznemű anyagon áthaladnak, hacsak a közeg elég vékony; a gázokat, a melyeken áthaladnak gyenge elektromos vezetőképességgel ruházzák fel.[1]

Az urániumvegyületek e tulajdonságai semmiféle ismert indító

[1] BECQUEREL, Comptes rendus 1896. évfolyam (több értekezés).

oknak nem tulajdoníthatók. A sugárzás látszólag egészen önként lép fel; erőssége egyáltalában nem fogy, ha éveken át teljes sötétségben tartjuk a vegyületeket; valami különleges, a fény által előidézett foszforeszkálásról tehát nem lehet szó.

Az urániumsugárzás önként jelentkezése és állandósága egy egészen rendkívüli fizikai jelenségként tüntek fel. Becquerel több éven át tartott sötétben egy darab urániumot és úgy találta, hogy ez idő alatt a fotografikus lemezre való hatás nem változott észrevehető mértékben. Elster és Geitel egy hasonló kisérlet után szintén állandónak találták a hatást.[1]

Én megmértem az uránium sugárzásának erősségét, e sugárzásnak a levegő elektromos vezetőképességére való hatását használva fel. A mérési eljárás leírását később részletezem. Az így nyert számadatok a sugárzás állandóságát a kisérletek pontossági határain belül (körülbelül 2—3 százalékig) igazolják.[2]

E méréseknél egy poralakban lévő urániumréteggel befedett fémlapot használtam; e lapot nem tartottam sötétben, minthogy e körülmény az idézett kutatók szerint lényegtelennek bizonyúlt. E lemezzel igen sok mérést végeztem, a melyek ma már 5 évi időközre terjednek ki.

Történtek azután vizsgálatok annak földerítésére, vajjon más anyagok is mutatnak az urániumvegyületekhez hasonló hatásokat. Schmidt tette közzé legelőször, hogy a thórium és vegyületei szintén képesek ily hatások előidézésére.[3] Magam is erre az eredményre jutottam egy vele egyidőben végzett, hasonló vizsgálat útján. Közzétettem e munkálatot, nem lévén akkor még tudomásom Schmidt dolgozatáról.

Azt fogjuk mondani, hogy az uránium, thórium és vegyületei *Becquerel-sugarakat* bocsátanak ki. A hasonló sugarakat kibocsátó

---

[1] Becquerel, Comptes rendus, CXXVIII. k., 771. lap. — Elster és Geitel, Beiblätter der Annalen der Physik, XXI. k. 455. l.

[2] Curie asszony, Revue générale des sciences, 1899 január.

[3] Schmidt, Wied. Ann. LXV. k. 141. lap.

[4] Curie asszony, Comptes rendus, 1898 április.

anyagokat *radioaktiv* anyagoknak neveztem.[1] Ezt az elnevezést később egész általánosan elfogadták.

Fotografikus és elektromos tulajdonságaik által a Becquerel-sugarak közel állanak a Röntgen sugarakhoz. Ép úgy át tudnak haladni bármely anyagon mint ez utóbbiak. Behatoló képességük azonban a legnagyobb mértékben különböző; az uránium- és thóriumsugarakat már nehány milliméternyi szilárd anyag felfogja s nehány centiméternél vastagabb levegőrétegen sem tudnak már keresztül haladni; legalább is így áll a dolog a sugárzás zömére nézve.

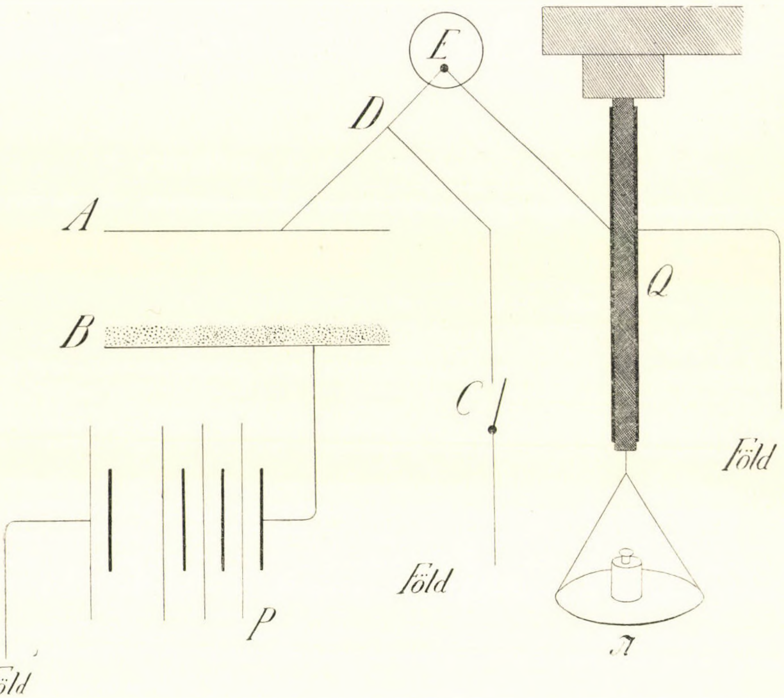
Több fizikusnak, első sorban RUTHERFORD-nak vizsgálatai bebizonyították, hogy a Becquerelsugarak sem szabályos visszaverődést, sem törést, sem polározádást nem szenvednek.[2]

Az uránium- és thóriumsugarak gyenge áthatoló képessége arra indíthat minket, hogy e sugarakat inkább a SAGNAC[3] által tanulmányozott, Röntgen-sugarak által előállított másodlagos sugarakkal azonosítsuk, mint magukkal a Röntgen-sugarakkal. Másrészt kereshetünk kapcsolatot a Becquerel-sugarak és a levegőben terjedő kathódsugarak (Lénárd-sugarak) között. Tudjuk manapság, hogy ily kapcsolatok felállítása nem alaptalan.

A sugárzás erősségének mérése. Az alkalmazott módszer a levegőnek radioaktiv anyagok behatása alatt nyert elektromos vezetőképességének leméréseben áll; ezen ejárás előnye, hogy gyorsan végezhető és hogy számokat szolgáltat, a melyek egymással összehasonlíthatók. Az e czélra szolgáló műszer lényegben egy AB lemezes kondenzátorból áll (1. rajz). Az aktiv anyag finom por alakjában a B lemezen terül el, és vezetővé teszi a lemezek közti levegőréteget. Hogy e vezetőképességet lemérhessük, a B lemezt magas potencziálra emeljük, úgy hogy egy kis akkumulátorokból álló telep egyik sarkával összekötjük, míg a másik sarkot a földbe vezetjük. Minthogy az A lemezt a földdel egyenlő potencziálon tartjuk a CD drót segítségével, a két lemez

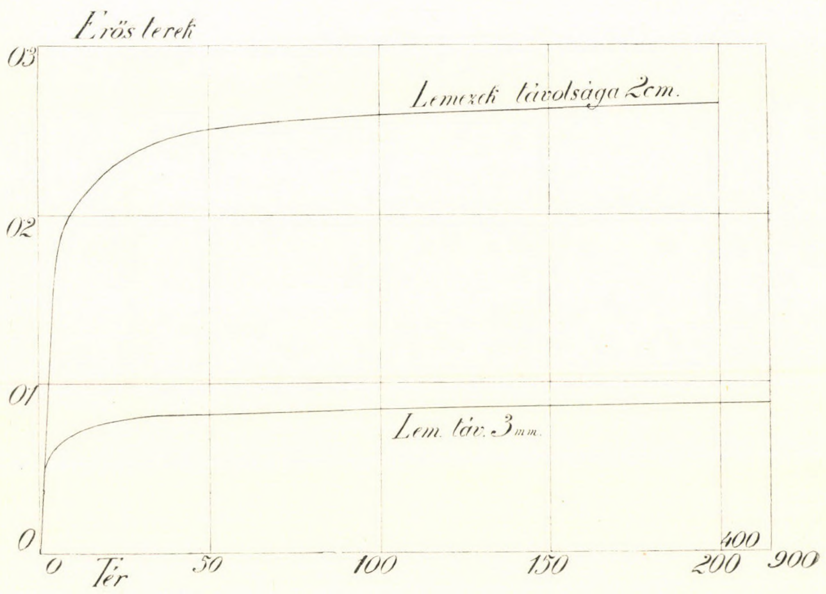
[1] P. CURIE és CURIE asszony, Comptes rendus, 1898 július 18.
[2] Philosophical Magazine, 1899 január.
[3] Comptes rendus, 1897, 1898, 1869 (több értekezés).

között elektromos áram fog fellépni. Az *A* lemez potencziálját egy *E* elektrométer jelzi. Ha *C*-ben a földdel való kapcsolatot megszakítjuk, az *A* lemez elektromossággal töltődik és e töltés kitéríti az elektrométert. Az eltérítés sebessége arányos az áramerősséggel és ennek mértékéül szolgálhat.



1. rajz.

Előnyösebb azonban a mérést úgy végezni, hogy az *A* lemez töltését kompenzáljuk, úgy hogy az elektrométer ne térjen ki. A szóban forgó töltések rendkívül gyöngék, s így egy *Q* piezoelektromos kvarcz által kompenzálhatók, melynek egyik fegyverzete az *A* lemezzel, másik fegyverzete pedig a földdel van összekötve. A kvarczhasábot ismert húzásnak vetjük alá azáltal, hogy a π csészébe súlyokat helyezünk el; a húzást fokozatosan állítjuk elő s ezáltal a kvarcz fokozatosan bizonyos elektromosság menynyiséget szolgáltat, melyet ismerni fogunk, ha lemérjük az időt, melyen át a húzás tartott. A művelet úgy végezhető, hogy minden pillanatban kompenzáczió álljon fönn a kondenzátoron áthaladó és a kvarcz szolgáltatta ellentett előjelű elektromos mennyiségek közt.[1] Lemérhetjük ilyenformán *abszolút értékben* az adott idő alatt a kondenzátoron áthaladó elektromosság mennyiségét s



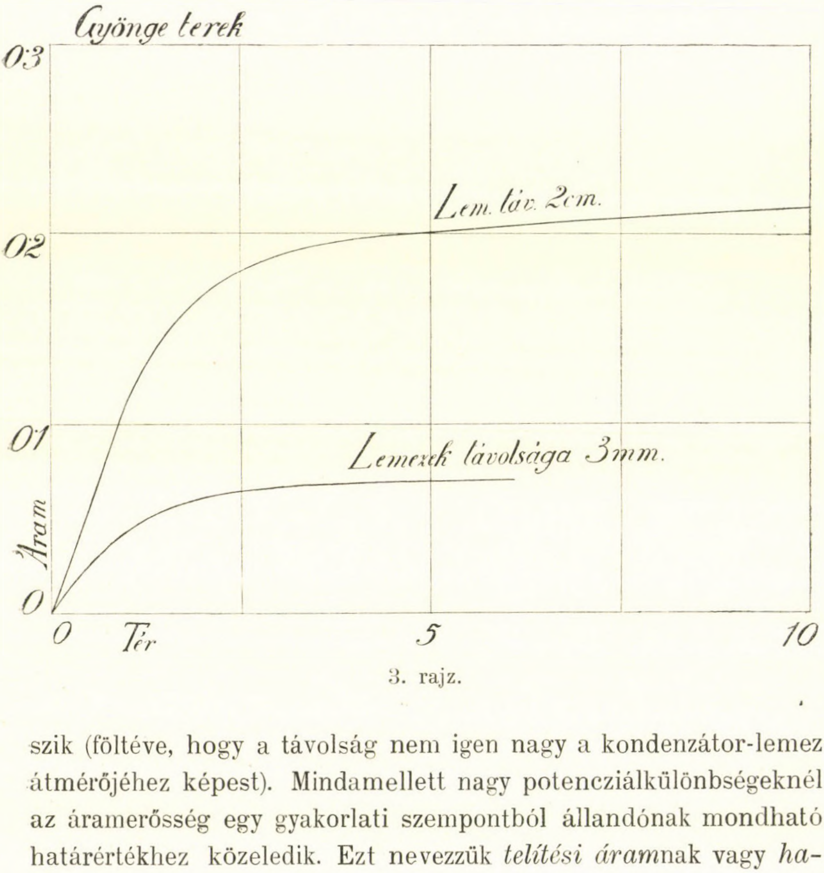
2. rajz.

ezáltal az *áram erősségét.* A mérés független az elektrométer érzékenységétől.

Bizonyos számú hasonló mérés elvégzése után látható, hogy a radioaktivitás egy bizonyos pontossággal lemérhető jelenség. A radioaktivitás a hőmérséklettel kis mértékben változik; a mé-

[1] Könnyen elérhetjük ezt az eredményt, ha a súlyt kezünkben tartjuk és csak fokozatosan engedjük a π csészére nehezedni, úgy hogy az elektrometer tűje állandóan a zéruson maradjon. Kis gyakorlat által könnyen elsajátíthatjuk a szükséges kézügyességet. Ezt a gyenge áramok mérésére szolgáló módszert J. CURIE írta le doktori értekezésében.

rési helyiségben fellépő hőmérsékleti ingadozások alig befolyásolják; ép így nincs rá hatással a radioaktiv anyag megvilágítása sem. A kondenzátoron áthaladó áram intenzitása a lemez felületével nagyobbodik. Adott kondenzátor és adott anyag mellett az áram a lemezek közt fellépő potencziálkülönbséggel, a kondenzátorban lévő gáz nyomásával, s a lemezek távolságával növek-



3. rajz.

szik (föltéve, hogy a távolság nem igen nagy a kondenzátor-lemez átmérőjéhez képest). Mindamellett nagy potencziálkülönbségeknél az áramerősség egy gyakorlati szempontból állandónak mondható határértékhez közeledik. Ezt nevezzük *telítési áram*nak vagy *határáram*nak. Hasonlóképen a lemezek elég nagy távolságán túl az áram erőssége már nem változik észrevehető módon e távolsággal. Az ily viszonyok közt fellépő áramot tekintettem kutatásaim folyamán a radioaktivitás mértékének, s a kondenzátort a légkör nyomása alatt álló levegőbe helyeztem.

Példaképen bemutatok két görbét, a melyek a lemezek két különböző távolsága mellett az áram erősségét a lemezek közt fennálló átlagos potencziálkülönbségek függvényeként ábrázolják. A *B* lemezt egy vékony réteg poralakú fémuránium borította; az *A* lemezt, mely az elektrométerrel volt összekötve, egy óvógyűrű vette körül.

A 2. rajz mutatja, hogy nagy potencziálkülönbségeknél az áram állandó lesz.

A 3. rajz ugyanezeket a görbéket más léptékben ábrázolja s csak a kisebb potencziálkülönbségeknek megfelelő eredményeket mutatja. A vége felé a görbe egyenesbe megy át; az áramerősség viszonya a potencziálkülönbséghez állandó és a lemezek közti kezdő vezetőképességét adja. A megfigyelt jelenségnek e szerint két fontos jellemző állandóját különböztetjük meg: 1-ször *a kezdő vezetőképességet* kis potencziálkülönbségeknél, 2-szor *a határ-áramerősséget* nagy potencziálkülönbségeknél.

A lemezek közt létesített potencziálkülönbségeken kivül még egy érintkezési elektromos erő is fellép s e két áramindító hatásai összeadódnak; ezért változik az áramerősségének abszolút értéke, ha a külső potencziálkülönbség előjelét megváltoztatjuk. Mindamellett jelentékeny potencziálkülönbségeknél az érintkezési elektromos erő hatása elhanyagolható, s akkor az áramerősség ugyanaz, bármily irányú a lemezek közt létesített erőtér.

A Becquerel-sugarak hatásának alávetett gázok vezetőképességét több fizikus tanulmányozta.[1] Igen kimerítő tanulmányt tett közzé e tárgyról Rutherford.[2]

A Becquerel-sugarak által gázokban előidézett vezetőképesség törvényei ugyanazok mint a melyeket Röntgen-sugarakkal megállapítottak. A két esetben, úgy látszik, ugyanaz a jelenség szerkezete. A Röntgen- vagy Becquerel-sugarak által a gázban létrejövő ionizálás elmélete igen jól számot ad a megfigyelt tényekről.

---

[1] Becquerel, Comptes rendus, CXXIV. k. 800. lap, 1897. — Kelvin, Beattie és Smolan, Nature, LVI. k. 1897. — Beattie és Smoluchowsky, Phil. Mag., XLIII. k. 418. lap.

[2] Rutherford, Phil. Mag. 1899 január.

Ezen elméletet itt nem ismertetem. Csupán eredményeit említem meg.

1-ször. A gázban másodperczenkint keletkező iónok számát a gáz által abszorbeált sugárzási energiamennyiséggel arányosnak tekintjük.

2-szor. Hogy egy adott sugárzáshoz tartozó határáramot megkapjuk, egyrészt e sugárzást teljesen el kell nyeletni a gázzal kellő mennyiségű abszorbeáló anyagot használva fel; másrészt az áram előállítására az összes keletkezett iónokat fel kell használni az által, hogy egy elég erős elektromos erőteret létesítünk, úgy, hogy az ismét egyesülő iónok száma az ugyanazon idő alatt keletkező új iónok számának csak jelentéktelen töredékét képezze, s így majdnem az összes iónok az áramtól elragadva, az elektródok felé vonuljanak. Az ennek létesítéséhez szükséges átlagos elektromos tér annál erősebb, minél nagyobb az iónizálás.

Townsend legújabb vizsgálatai szerint a jelenség bonyolódottabb, ha a gáz nyomása alacsony. Eleinte úgy látszik, mintha az áram erőssége a potencziálkülönbség fokozásával egy állandó határértékhez közelednék; de egy bizonyos potencziálkülönbségtől kezdve az áram megint el kezd erősödni a potencziálkülönbség növelésével, még pedig rohamosan. Townsend fölteszi, hogy ez az erősödés egy új iónizálásnak tudandó be, melyet az iónok maguk létesítenek, midőn az elektromos tér hatása alatt már akkora sebességet nyernek, hogy röptükben beleütődve egy gázmolekulába, azt összetörik és alkotó iónjaira bontják. Magas erőtér és alacsony nyomás elősegítik a már jelenlévő iónok által történő iónizálást s a mint ez megkezdődik, az áram intenzitása állandóan növekszik a lemezek közt fellépő átlagos erőtérrel.[1] A határáramot e szerint csak oly iónizáló okok által lehetne létesíteni, melyeknek erőssége egy bizonyos határt túl nem lép, úgy hogy a telítés oly erőterekre vonatkozik, a melyeknél az iónokkal való összeütközések még nem segíthetik elő az iónizálást. Ez a követelés az én kisérleteimnél ki volt elégítve.

[1] Townsend, Phil. Mag., 1901, 6. sorozat, 1 k. 198. l.

Az urániumvegyületekkel létesitett határáramok erősségének nagyságrendje 10^{-11} Ampère egy 8 cm. átmérőjű lapokkal biró kondenzátor alkalmazása mellett, ha a lemezeket egymástól 3 cm. távolságra helyezzük el. A thóriumvegyületek ugyanily nagyságrendü áramokat létesitenek s az uránium- és thóriumoxidok radioaktivitása igen hasonló.

Az uránium- és thóriumvegyületek radioaktivitása. — Itt közlöm ama számadatokat, a melyeket többféle urániumvegyülettel kaptam; i-vel jelölöm az áram erősségét Ampère-ekben:

	$i \times 10^{11}$
Fémuránium (némi széntartalommal)	2·3
Fekete uránium U_2O_5	2·6
Zöld urániumoxid	1·8
Urániumsav (hidrát)	0·6
Nátriumuranát	1·2
Káliumuranát	1·2
Ammoniumuranát	1·3
Urániumszulfát	0·7
Uránil- és nátrium-szulfát	0·7
Uránil-nitrát	0·7
Réz- és uránil-foszfát	0·9
Urániumoxiszulfid	1·2

Az alkalmazott urániumréteg vastagságának befolyása csekély, feltéve, hogy a rétegzés folytonos. Ime nehány idevágó kisérleti adat:

	A réteg vastagsága	$i \times 10^{11}$
Urániumoxid	0·5 mm.	2·7
«	3·0 «	3·0
Ammoniumuranát	0·5 «	1·3
«	3·0 «	1·4

Ebből arra következtethetünk, hogy az anyag maga, a mely az urániumsugarakat kiadja, igen erősen abszorbeálja ezeket, minthogy a mélyebb rétegekből kiinduló sugarak már nem tudnak jelentékeny hatásokat létesiteni.

A thóriumvegyületekkel nyert számadatok segítségével megállapíthattam:[1]

1-ször. Hogy az alkalmazott réteg vastagságának jelentékeny befolyása van.

2-szor. Hogy a jelenség csak csekély (pl. 0·25 mm.) rétegvastagságok alkalmazása mellett szabályos és hogy nagyobb rétegvastagzágnál tág határok közt ingadozó számadatokat nyerünk, kivált az oxid esetén:

	Rétegvastagság	$i \times 10^{11}$
Thóriumoxid	0·25 mm	2·2
«	0·5 «	2·5
«	2·5 «	4·7
«	3·0 «	átlagban 5·5
«	6·0 «	« 5·5
Thóriumszulfát	0·25 «	0·8

A jelenség természetében a szabálytalanságoknak egy oly oka rejlik, mely az urániumvegyületeknél nem lép fel. Egy 6 mm. vastagságú thóriumoxiddal nyert számadatok 3·7 és 7·3 között ingadoznak.

Az uránium- és thóriumsugarak abszorpcziójára vonatkozó kísérleteim mutatták, hogy a thóriumsugarak áthatoló képessége nagyobb, mint az urániumsugaraké, és hogy a thóriumoxid vastag rétege által kibocsátott sugarak áthatoló képessége nagyobb mint a vékony rétegű thóriumoxid kibocsátotta sugaraké. A következő számok mutatják, hogy a sugárzásnak hányadrésze halad át egy 0·01 mm. vastag aluminiumlemezen:

Sugárzó anyag	A lemez által átbocsátott sugárzás
Uránium	0·18
Urániumoxid U_2O_5	0·20
Ammóniumuranát	0·20
Uránium és rézfoszfát	0·21

---

[1] Curie asszony, Comptes rendus, 1898 április.

Thóriumoxid	0·25 mm vastagságban	... ...	0·38
«	0·5 « «	... ...	0·47
«	3·0 « «	... ...	0·70
«	6·0 « «	... ...	0·70
Thóriumszulfát	0·25 « «	... ...	0·38

Urániumvegyületeknél az abszorpczió ugyanaz, akármily vegyületet alkamazunk, a mi azt a véleményt kelti bennünk, hogy a különböző vegyületek ugyanoly természetű sugarakat bocsátanak ki.

A thóriumvegyületek sugárzásának sajátosságai igen kimerítő közlemények tárgyát képezték. Owens[1] kimutatta, hogy az áram állandósága csak elég hosszú idő múlva érhető el zárt edényben és hogy az áram intenzitása levegőáramlatok hatása alatt nagy mértékben csökken (a mi urániumvegyületeknél nem észlelhető). Rutherford hasonló kisérleteket végzett s eredményeit úgy magyarázta, hogy a thórium és vegyületei nem csak Becquerel-sugarakat, hanem egy *emanácziót* is kibocsátanak, a mely rendkívül finom részecskékből áll, a melyek még kibocsátásuk után bizonyos ideig radioaktivok maradnak s a melyeket a légáramlat magával sodorhat.[2]

A thóriumsugárzásnak az alkalmazott réteg vastagságára és a légáramlatok befolyására vonatkozó jellemző sajátságai szoros összefüggésben vannak az *indukált radioaktivitás és ennek közről-közre való terjedésével.* E jelenség első megfigyelése a rádiumon történt s leírása később következik.

Az uránium és thórium vegyületek radioaktivitása *atómikus tulajdonság*ként tűnik fel. Már Becquerel észrevette, hogy az uránium összes vegyületei radioaktivok s arra következtetett, hogy aktivitásuk az uránium elem jelenlétének tudandó be; kimutatta továbbá, hogy az uránium maga aktivabb mint sói.[3] Én

[1] Owens, Phil. Mag., 1899 október.
[2] Rutherford, Phil. Mag. 1900.
[3] Becquerel, Comptes rendus, CXXII. k. 1086. l.

ebből a szempontból tanulmányoztam az uránium és thórium vegyületeit és igen sok mérést végeztem aktivitásukra nézve különböző körülmények közt. E mérések összeségéből tényleg kiviláglik, hogy a radioaktivitás valóban egy atómikus tulajdonság. Úgy látszik, hogy a jelen esetben a radioaktivitás a két szóban forgó elem jelenlétéhez van kötve és nem tehető tönkre sem halmazállapotváltozásokkal, sem kémiai átalakulásokkal. Az urániumot vagy thóriumot tartalmazó kémiai vegyületek és keverékek annál aktivabbak, minél nagyobb arányban tartalmazzák e fémeket, míg az inaktiv anyagok egyidejűleg mint tehetetlen és a sugárzást abszorbeáló anyagok szerepelnek.

Vajjon az atómikus radioaktivitás általános jelensége-e? — A mint előbb említettem, megvizsgáltam, vajjon az uránium és thórium vegyületein kivül mutatnak-e más anyagok is radioaktivitást. E vizsgálatokhoz attól a gondolattól vezérelve fogtam hozzá, hogy a radioaktivitás — atómikus tulajdonságnak tekintve — minden valószinűség szerint az anyag bizonyos nemével jár, minden másnemű anyag kizárásával. A végzett mérések alapján kimondhatom, hogy a ma kémiai elemeknek tekintett anyagok közül, beleértve a legritkábbakat és legkérdésesebbeket, az általam megvizsgáltak műszeremben legalább százszor kevésbbé aktivoknak mutatkoztak, mint az uránium. Az elterjedt elemek több vegyületét is megvizsgáltam, a ritkábbak vegyületei közül azokat, a melyeket meg tudtam szerezni.

Ime az anyagok lajstroma, a melyek elem vagy vegyület alakjában tanulmányom tárgyát képezték:

1-ször. Az összes könnyen megszerezhető fémek és metalloidok és nehány tiszta előállításban ritkább fém és metalloid Etard úrnak és Páris város ipari fizikai és kémiai iskolájának gyüjteményéből;

2-szor. A következő ritka anyagok: gallium, germánium, neodím, prazeodím, nióbium, szkandium, gadolínium, erbium, szamarium és rubidium (Démarçay úrtól kikölcsönözve); ittrium, itterbium új erbiummal (Urbain[1] úrtól kikölcsönözve).

---

[1] Igen hálás vagyok az említett tudósoknak, kik a tanulmán

3-szor. Sok kőzet és ásvány.

Műszereim érzékenységi határain belül nem találtam más egyszerű testet az uránium és thóriumon kívül, a mely atómikus radioaktivitással lett volna felruházva. Meg kell azonban jegyeznem a következőket a foszforról. A nedves fehér foszfor a kondenzátor lemezei közé helyezve, a lemezek közti levegőt vezetővé teszi.[1] Mindamellett e testet nem tekintem oly értelemben radioaktivnak, mint az urániumot és thóriumot.

A foszfor ugyanis ily viszonyok közt oxidálódik és fénysugararakat bocsát ki, míg az uránium és thóriumsugarak radioaktivak a nélkül, hogy ismert módszerekkel kimutatható, észrevető kémiai átalakulást szenvednének. Továbbá a foszfor nem radioaktiv sem vörös foszfor alakjában, sem vegyületeiben.

Egy legújabb dolgozatában Bloch kimutatta, hogy a foszfor levegő jelenlétében oxidálódva igen kevéssé mozgékony iónokat hoz létre, a melyek a levegőt vezetőképességgel ruházták fel és lecsapódásra kényszerítik a vízgőzt.[2]

Nehány újabb vizsgálat arra a feltevésre vezetne, hogy a radioaktivitás minden anyagnak rendkívül kis mértékben osztályrészül jut.[3] E rendkívül gyönge jelenségek azonossága az atómikus radioaktivitással még nem tekinthető bebizonyított ténynek.

Az uránium és thórium a legnagyobb atómsúlyú elemek (240 és 232); gyakran fordulnak elő ugyanazon ásványokban.

Radioaktiv ásványok. Megvizsgáltam készülékemben több ásványt;[4] ezek között akadtak radioaktivak: többek közt a szurokércz, a khalkolit, az autunit, a monazit, a thórit, az oránzsit, fer-

---

szükséges anyag-mintákat rendelkezésemre bocsátották. Köszönetet mondok továbbá Moissan úrnak is, a ki e tanulmányaimhoz szükséges fémurániumot engedte át.

[1] Elster és Geitel, Wied. Ann. 1890.

[2] Bloch, Société de Physique, 1903 február 6.

[3] Mac Lennan és Burton, Phil. Mag. 1903 junius. — Strutt, Phil. Mag. 1903 junius. — Lester Cooke, Phil. Mag. 1903 október.

[4] A múzeum gyüjteményének több ásványát Lacroix úr bocsátotta lekötelező szívességgel rendelkezésemre.

guzonit, a kléveit stb. A következő táblázat Ampère-ekben adja az urániummal és más ásványokkal nyert áram i intenzitását:

	$i \times 10^{11}$
Uránium	2·3
Johanngeorgenstadti szurokércz	8·3
Joachimsthali szurokércz	7·0
Pzribrami szurokércz	6·5
Cornwallisi szurokércz	1·6
Kléveit	1·4
Khalkolit	5·2
Autunit	2·7
Különböző thóritok	0·1 0·3 0·7 1·3 1·4
Oránzsit	2·0
Monazit	0·5
Xenotim	0·03
Eszkhinit	0·7
Ferguzonit, 2 példány	0·4 0·1
Szamarszkit	1·1
Niobit, 2 példány	0·1 0·3
Tantalit	0·02
Karnolit[1]	6·2

Az oránzsittal (thórium oxidos ércz) nyert áram erőssége nagy mértékben változott az alkalmazott réteg vastagságával. 0·25 mm-

[1] A karnolit az uránium vanadatnak egy legujabban Friedel és Cumenge által felfedezett ércze.

ről 6 mm-ig változtatva e vastagságot az áram 1·8-ről 2·3-re emelkedett.

Az összes ásványok, a melyek radioaktivoknak mutatkoztak, urániumot, vagy thóriumot tartalmaznak; aktív voltukban tehát semmi csudálatos nincs, a jelenség erőssége azonban egyes ásványoknál váratlan. Van pl. olyan szurokércz (uránium oxydos kőzet), a mely 4-szer olyan radioaktiv, mint a fémuránium. A khalkolit (kristályos réz- és urániumfoszfát) kétszer olyan aktív, mint az uránium.

E tények a megelőző meggondolásokkal nem voltak összhangzásban, mert ezek szerint egy ásványnak sem szabadna az uránium- és thóriumnál nagyobb mértékben radioaktivnak mutatkozni.

Hogy a kérdést tisztázzam, Débray eljárása szerint mesterséges khalkolitot állítottam elő tiszta anyagokból indulva ki. Az eljárás abban áll, hogy uraníl nitrát és rézfoszfát foszforsavas oldatait összekeverjük és 50°—60°-ra hevítjük. Kevés idő múlva khalkolit kristályok képződnek a folyadékban.[1] Az így előállított khalkolit aktivitása teljesen normális, összetételének megfelelő; két és félszer kevésbbé aktív, mint az uránium.

Azóta igen valószínűvé lett, hogy a szurokércz, a khalkolit és autunit nagy aktivitásának oka abban keresendő, hogy igen kis mértékben valami nagyon radioaktiv anyagot tartalmaznak, mely az urániumtól, thóriumtól és az eddig ismert egyszerű testektől különböző. Azt gondoltam hogy, ha ez valóban így van, remélhetem, hogy ezt az anyagot a kémiai analizis szokásos eljárásai által ezen érczből ki fogom tudni választani.

Fordította: *Zemplén Győző.*

---

[1] Debray, Annales de Chimie et Physique 3. sorozat, LXI. k. 445. l.

IRODALOM.

A tengerjárás és rokontünemények naprendszerünkben. Irta G. H. DARWIN, fordította Dr. KÖVESLIGETHY RADÓ, az eredetivel összehasonlította Dr. b. EÖTVÖS LORÁND, kiadja a K. M. Természettudományi Társulat. Budapest 1904.

Bármilyen tartalmú és fajtájú könyvek között azok a legbecsesebbek, melyekben a szerzők saját gondolataik és kutatásaik eredményét viszik a nagyközönség elé. DARWINnak a tengerjárásról szóló könyve még becsesebbé válik az által, hogy megirásánál ez az előkelő kutató tudós félre rakta azokat a technikai eszközöket, a melyek őt kutatásai közben vezették és a nehéz és szövevényes tárgyat egyszerű és természetes nyelven adja elő az olvasónak. E tekintetben követte azt a példát, a melyet DAVY, FARADAY, TYNDALL, LORD KELVIN és mások adtak.

De valóságos szükséget is pótol ez a könyv. Épen a tengerjárás az a jelenség, a melyről a legtévesebb nézetek vannak elterjedve még olyanok között is, kik különben a fizikai jelenségek lényegéről elég jól vannak tájékozva. A jól képzett fizikus és matematikus is annyi újat fog olvasni e népszerű könyvben, hogy önként be fogja vallani, miszerint mindezekről ezideig nem volt fogalma, vagy ha volt is, az nem volt helyes! Pedig a tengerjárás jelensége Földünk életében elsőrendű szerepet visz és a közlekedésre való kihatásában gyakorlati fontossága is van. Mindazonáltal csak a csillagászati könyvek egy két lapján lehetett felőle nagyon is hiányos felvilágosítást nyerni.

Igazi örömmel üdvözöljük e könyvnek magyar kiadását, nemcsak azért, mert szégyenletesen szegény fizikai irodalmunkat gazdagítja, hanem azért is, mert az a remény kecsegtet, hátha e könyv sikere buzdítólag fog hatni oly irányban, hogy az égetően szükséges fizikai monografiák kiadása végre-valahára megvalósuljon!

Az elmult évtized csodálatos módon kibővítette fizikai ismereteinket. Az elektromos hullámok, a drótnélküli telegráfia, a légkör új elemei, a Röntgen-sugarak, a fény és elektromosság kölcsönhatásai, a testek radioactiv tulajdonságai oly felfedezések, melyek nemcsak új tényeket ismertettek meg velünk, hanem a természetről való fölfogásunkat is alaposan megváltoztatták. És különös: e felfedezésekben gazdag időszak alig hozott igazi népszerű fizikai könyvet a piaczra. Ennek okát talán abban kereshetjük, hogy e felfedezéseket új és meglepő voltuknál fogva, nemcsak a népszerűsítő folyóiratok és hetilapok, hanem még a napisajtó efemer értékű rovatai is bő, sokszor talán túlságosan fantasztikus ismertetésekben részesítették. Ily módon a közönség érdeklődése előre is kielégítve, sőt kimerítve lévén, tartalmasabb könyvek kiadása szükségesnek nem látszott. De másrészről e jelenségek a kutató és fölfedező tudósok figyelmét is annyira lekötötték, hogy népszerű földolgozásra alig juthatott idő.

Hogy ez így van, az egyrészt örvendetes bizonyítéka annak, hogy a természettudományok iránt való érdeklődés igen magas fokra hágott, de másrészt az igazi tudományosság szempontjából sajnálatos körülmény. Sajnálatos azért, mert ezek az ismertetések nem *úgy* és nem azzal a *czélzattal* készültek, hogy a kutató tudós eszmevilágába, a kutatás módszerébe bepillantást engedjenek; ezek csak a kiváncsiságot akarták kielégíteni és így értékük alig több, mint a muló napi hirekké. A tudományos ismertetéseknek akkor van maradandó értékük, ha a természet megismerésének útját, a kutatások módszerét, szóval azt, a mit fizikai gondolkodásmódnak lehet nevezni, feltüntetik és terjesztik.

E szempontok érvényesítése tekintetében Darwin könyve oly magas fokon áll, hogy az újabb irodalomban alig egy-kettő s a régibb időkből is nagyon kevés éri utól. A szerző már a tárgy berendezésében úgy jár el, hogy az olvasót fokonként vezesse be abba a gondolatkörbe, mely a tengerjárás tüneményéhez kapcsolódik. E berendezés oly mesteri, hogy kedvünk volna a jól megírt dráma szerkezetéhez hasonlítani. Az első három fejezet magában foglalja az expositiót, vagyis a tények előadását. a IV—XV. terjedő fejezetekben bekövetkezik a bonyodalom: a tengerjárás jelenségének magyarázata. Itt ismerjük meg a fő működő erőket: a Hold és a Nap vonzásából származó *árkeltő erőt* és ennek ellenfeleit a víztömegek *tehetetlenségét* és a *súrlódást*. Le vannak irva azok a küzdelmek, melyeket a tudós folytat, hogy ez erők hatását fölismerje és kiszámítsa. A küzdelem sikeres, mert ím a tengerjárási táblázatok a kikötőbe törekvő hajóknak előre megmondják, mikor van apály és mikor dagály. A XVI—XX. terjedő fejezetek a végkövetkeztetéseket tartalmazzák. A nyert ismeretek elegendők ahhoz, hogy Földünk és naprendszerünk múltjára és jövőjére vonatkozó kérdések egész tömegét megoldjuk.

A könyv azzal kezdődik, a mivel minden fizikai könyvnek kezdődnie kellene: az észlelési módszerek leirásával. Ismerteti a *limnograf*-okat, ezeket az igen egyszerű eszközöket, a melyek a vízfelszin ingadozásait nemcsak megmutatják, hanem fel is jegyzik. Az első a mi feltünik az, hogy az apály és dagály váltakozásának periodusa szoros összefüggésben van a Hold keringési idejével. Kell tehát, hogy a két jelenség ok és okozati viszonyban álljon.

A II. fejezetben azonban új tényekkel állunk szemben. Itt van leirva az a jelenség, a melyet a Genfi-tó vidékén «*seiche*» néven ismernek, a mely azonban más nagyobb tavaknál is tapasztalható. Dr. Forel-nek több mint negyedszázad óta folytatott vizsgálataiból tudjuk, hogy a *seiche* nem egyéb mint a tó vizének szabályos ingása egyensúlyi helyzete körül. A jelenség okaiban s lefolyásában teljesen azonos a kilódított inga lengésével és a megpendített húr rezgésével. E mozgások periodusa csak az illető test méreteitől és tömegétől függ. A könyv végén lévő Függelékből, melyben Kövesligethy a magyar vonatkozású vizsgálatokat ismerteti, megtudjuk, hogy a Balaton ilynemű ingásai hogy folynak le.

E fejezet rámutat a viztömegek tehetetlenségére, mint a második főokra, melynek a tengerjárás lefolyásában oly fontos szerepe van. A III. fejezetből pedig ismét egy új jelenséggel kapcsolatban megismerjük a harmadik főokot: a surlódást. Ez az új jelenség a folyók árapálya és különösen a «*bore*».

Rövid történeti visszapillantás után az V. fejezetben megkezdődik a tulajdonképeni tárgyalás: a tengerjárás magyarázata. Az ebben és a következő fejezetekben alkalmazott módszer mintaképe annak, hogyan lehet aránylag igen nehéz és szövevényes dolgokat egyszerű módon megmagyarázni. Darwinnak itt alkalmazott elvét röviden talán így lehetne kimondani: «egyszerűsíts és érthető leszel». Azt akarjuk ezzel mondani, hogy a helyes magyarázat az első lépésnél elhagy minden mellékest, a jelenséget — hogy úgy mondjuk — levetközteti meztelenre; ily módon a létrehozó főok hatása egészen világosan látható. Ha azután így ennek működését megismerjük, lassanként hozzácsatolhatjuk a többit, azokat, a melyeket előbb tekintetbe nem vettünk és így a jelenséget fokonként fölruházzuk azokkal a mellékes körülményekkel, a melyek a valóságos tapasztalatok előállításához szükségesek. Ez a módszer, az analysisnek és synthesisnek ez a bámulatos keveréke, a természeti vizsgálatokban mindig igen termékenynek bizonyult. Ennek köszönhetik a természettudományok igazságaiknak legnagyobb részét.

Darwin abból indul ki, hogy a Nap hatását elhanyagolja, a Földet tengelyforgásától megfosztottnak gondolja; képzeli tehát, hogy a világtérben csak két test: a Föld és a Hold kering közös súlypontjuk körül. Kérdés, hogy ebben az egyszerű rendszerben micsoda árkeltő erők keletkeznek? A felelet igen könnyen adódik. A keringésből keletkező centrifugális erő és a vonzóerő egyenlő ugyan, de a teljes egyensúlyozás csak a Föld középpontjára vonatkozólag van meg. A Földnek a Hold felé eső részén a vonzás értéke az átlagosnál nagyobb, a szembefekvő részen pedig kisebb; amott tehát a vonzás, itt pedig a centrifugális erő a nagyobb. Ily módon a Hold felé néző oldalon az átlagosnál nagyobb vonzásból csupa olyan árkeltő erők keletkeznek, melyeknek egyik componensük a Hold felé mutat; az ellenkező félgömbön pedig a nagyobb centrifugális erőből mindig oly árkeltő erők keletkeznek, melyeknek egyik componensük ellenkező irányban halad, mint a Hold helyzete. Meg vagyunk győződve arról, hogy az árkeltő erőnek ez a rövid, szabatos és igen érthető tárgyalása át fog menni fizikai tankönyveinkbe és a mostani — inkább megtévesztő mint felvilágosító — magyarázatokat ki fogja szorítani.

Az árkeltő erő fogalmának megtalálása után igen érdekesen irja le azokat az igen kényes és finom kisérleteket, melyeket testvérével együtt az árkeltő erő nagyságának lemérése czéljából végzett. Minket, magyarokat e leirás annál inkább érdekelhet, mert ehhez hasonló kisérleteket sehol másutt nem végeznek, csak épen itt Magyarországon Eötvös gravitationális műszereivel.

Meg lévén az árkeltő erő fogalma, az egyszerűsítő föltevéseket fokonként elhagyogatja és lépésről-lépésre közeledik azokhoz a viszonyokhoz, melyek a természetben uralkodnak. Megengedi a tengelyforgást és vizsgálja következményeit. Azután a Hold hatásához hozzáteszi a Nap hatását és következtet a resultans árkeltő erő nagyságára. Majd kimutatja, hogy az árkeltő erőnek csak a vizszintes componense hozhat létre elmozdulást, minthogy a függőleges componens magával szemben találja a sokszorta nagyobb nehézségi erőt. Megvizsgálja a Föld szilárd kérgében létrejöhető alakváltoztatásokat, ha a dagályhullám nagyobb megterhelést okoz. Mindezek után a Föld különböző szélességei számára levezeti a dagály nagyságát és idejét.

Mindezideig az a föltevés is volt, hogy a Földet egyenletesen borító tenger vize elegendő idővel bir arra, hogy az árkeltő erők hatásának engedjen és így azt az egyensúlyalakot vehesse fel, melyet a tényleg működő erők követelnek. Most ezt a föltevést félreteszi és vizsgálja a szabad és kényszerhullámok létrejöttének és terjedésének föltételeit. Immár tekintetbe jő az a második főok, a melyet a II. fejezet sejtetni engedett, nevezetesen a folyadéktömegeknek tehetetlenségükből származó ingása.

Így lassanként eléri a tényleg létező viszonyokat. Módja van megmagyarázni azokat a dagályjelenségeket, a melyek az egyensúly-elméletnek ellenmondanak. De a feladatnak igen nehéz része még hátra van: meg kell magyarázni, hogyan jósolhatók meg a dagályjelenségek? Ismét az analysis és synthesis szerepel. Megmutatja, hogy a megfigyelésből származott apálydagály-görbét hogyan lehet elemezni és az egyes szerepet játszó tényezők hatását hogyan lehet a többitől elválasztani és azután azokat ismét összerakni. DARWIN a harmonikus analysis nagy modern módszerét meglepő könnyűséggel érteti meg az olvasóval. Ez a tárgyalás világos bepillantást enged azokba a módszerekbe, melyekkel az észlelési adatokat redukálni lehet. E fejezetek egyszersmind világos bizonyítékai annak, hogy a hozzáértő ember a legsúlyosabb mathematikai okoskodásokat is megmagyarázhatja a nélkül, hogy a tudomány szakkifejezéseit használnia kellene. Az igazi mathematikai gondolkodásmódnak nem az a lényege, hogy tömve legyen aprólékos definitiókkal és az elvont tételek tömegével.

A könyv legérdekesebb része kétségkívül az utolsó, a mely a XV. fejezettől a könyv végéig terjed. Ebben a részben a dagálysurlódás következményeinek révén módja van a spekulativ csillagászat legfontosabb kérdéseivel foglalkozni. Megmutatja, hogy a dagálysurlódás miként késlelteti a dagályt, a Föld tengelyforgását és a Hold keringését, ebből következtet a jövőben bekövetkező végső állapotra, a mikor a Hold és a Föld úgy fog keringeni és forogni, mintha egymáshoz volnának kapcsolva; de következtet visszafelé a multba is, a mikor ugyanez az állapot volt. Azután a naprendszer többi tagjaira tér át, melyeknél hasonló viszonyok vannak. Ennek révén a forgó folyadéktömegek egyensúlyi alakzataival foglalkozik, kezdi PLATEAU kisérleteivel és végzi POINCARÉ kitűnő elméleti alakjaival. Ebből áttér a KANT-LAPLACE-féle ködhypothezisre és azt a dagálysurlódásból származó adatokkal támogatja és helyesbíti. Az utolsó fejezetben Szaturnusz gyűrűivel foglalkozik, megmutatja, hogy MAXWELL vizsgálatai, melyek szerint e gyűrűk különálló részekből állanak, miként egyeznek a dagálysurlódás elméleteivel.

A könyv magyarsága kifogástalan, a mint azt a fordító neve és a Természettudományi Társulat czégére különben is garantálja. Arra kell azonban kérnünk a Természettudományi Társulatot, hogy a fizikai könyvek kiadásánál az ábrák művészi kivitele érdekében épen olyan anyagi áldozatot hozzon, miként azt egyéb kiadványainál teszi. Általánosan ismeretes, hogy ROITI kitűnő könyvében az ábrák milyen rosszak. Valamivel jobbak, de még mindig sok gyarlóságban leledzenek DARWIN ábráinak reprodukcziói.

Azzal végzem, a mit egy angol fizikus írt e könyvről: «Ezt a könyvet ajánlom a mathematikusok figyelmébe, ámbár az egészben nem találunk egyetlenegy formulát sem, de épen azért, hogy lássák, miként lehet a mathematikai okoskodás lényegét formula nélkül megérteni.»

Kimutatás

az 1904. év márczius és április havában befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek :

1899. évre : Winkler Lajos dr. ... ... 10 kor.
1900. évre : Winkler Lajos dr. ... ... 10 kor.
1902. évre : Oberle Károly ... ... 6 kor.
1903. évre : Bánki Donát 10 kor., Eberhardt Béla 6 kor., Fröhlich Károly 10 kor., Harsányi Dezső 10 kor., Képessy Imre 10 kor., Kherndl Antal 10 kor., Kiss Tamás 6 kor., Klug Nándor 10 kor., Kovács Béla 6 kor., Kunfalvi H. Rezső 6 kor., Nagy Dezső 10 kor., Schlesinger Lajos dr. 6 kor., Strausz Ármin 10 kor., Szabó Péter 10 kor., Szentmiklósy Jenő 6 kor., Tass Antal 6 kor., Terkán Lajos dr. 6 kor., Tolnay Lajos 10 kor., Winter József 10 kor., Zipernovszky Károly 10 kor. Összesen ... ... 168 kor.
1904. évre: Anderkó Aurél dr. 10 kor., Antolik Károly 6 kor., Barabás Jenő 6 kor., Bauer Mihály 10 kor., Blau Ármin 6 kor., Bretz Berta 6 kor., Bukovszky János 6 kor., Butorka Száva dr. 6 kor., Demeter István 6 kor., Dombay Narczisz 6 kor., Dózsa János 6 kor., Egan Luiza 10 kor., Eltscher Simon 6 kor., Feldmann Gyula 10 kor., Félegyházy Antal 6 kor., Fraunhoffer Lajos 10 kor., Glücklich Vilma 10 kor., Halász Ernő 10 kor., Harsányi Dezső 10 kor., Hausbrunner Vilmos 10 kor., Hatvani Ede 6 kor., Hilbert Stefánia 10 kor., Hill József 6 kor., Hronyecz György 6 k., Janell József 6 kor., Javorik János 6 kor., Karlovitz László 10 k., Károly J. Irén 6 kor., Kirchknopf András 6 kor., Kiss Gábor 6 k., K. Kiss József 6 kor., Kiss Tamás 2 kor., Klatt Román 6 kor., Kóródy Imre 6 kor., Lakits Ferencz dr. 10 kor., Lakner József 6 kor., Lévay Ede dr. 10 kor., Lóky Béla 6 kor., Magdics Gáspár 6 kor., Markoss Imre 6 kor., Mayer Irén 6 kor., Mihálovich Alajos 6 kor., Mikola Sándor 10 kor,, Miller Gyula 6 kor., Módly Krizsó 6 kor., Nagy Balázs 6 kor., Neumann Jenö 6 kor., Neustadt Lipót 10 kor., Palatin Gergely 6 kor., Pilcz Ottó 10 kor., Ráth Arnold Lajos 10 kor., Rothemberg Simon 6 kor., Schenek István 10 kor., Schlesinger Lajos dr. 6 kor., Simon Ferencz 6 kor., Simon Tadé

6 kor., Sinkó József 6 kor., Sós Ernő 10 kor., Stanics Fulgent 6 kor., Stauber József 6 kor., Straub Gyula 10 kor., Straub Sándor 10 kor., Suták József dr. 10 kor., Szabó János 6 kor., Szabó Péter 8 kor., Szekeres Kálmán dr. 3 kor., Széky István 6 kor., Szemethy Béla 10 kor., Szirtes Ignácz 6 kor., Szokol Pál dr. 6 k., Tass Antal 6 kor., Terkán Lajos dr. 6 kor., Tihanyi Miklós 6 kor., Vörös Cyrill 10 kor., Wéber Márton 6 kor., Wittmann Ferencz 10 kor., Závodszky Adolf 10 kor., Zilahy László 6 kor., Zorkoczy Samu 6 kor. Összesen ... ... 573 kor.

Előfizetési díjat fizettek:

1903. évre: Ó-Gyallai m. kir. országos meteorologiai és földmágnességi központi observatorium ... ... 10 kor.
1904. évre: Békés-Csabai ev. ref. Rudolf főgymn. 10 k., Kecskeméti áll. főreáliskola 5 kor., Kilián Frigyes utóda 20 kor., Kolozsvári ev. ref. theol. 10 kor., Mérnök-épitész-egylet 10 kor., Pozsonyi áll. főreáliskola 10 kor., Szabadkai közs. fögymn. 10 kor., Szamosujvári áll. főgymnasium 10 kor., Schwarcz Károly 5 kor., Temesvári áll. főreáliskola 10 kor. Összesen ... ... 110 kor.

Alapítványt tett:

Báró Harkányi Béla dr. ... ... 200 kor.

Összesen befolyt:

Hátralékokból	194 kor.,	január 1-től	342 kor.
F. és köv. évi díjból ...	573 kor.,	« «	1007 kor.
Előfizetési díjból	120 kor.,	« «	632 kor.
Alapítványi díjból ...	200 kor.,	« «	400 kor.

Kelt Budapesten, 1904 május 1.

Feichtinger Győző
pénztárnok.
(VII., Aréna-út 15.)

A KÚPSZELET MINT GEOMETRIAI HELY.

(Első közlemény.)

Jelen értekezésben a kúpszeleteket, mint az olyan pontoknak geometriai helyét tárgyaljuk, a melyeknek távolságai

1. egy egyenestől és egy ponttól,
2. egy síktól és egy ponttól,
3. egy síktól és egy egyenestől, végre
4. két egyenestől

állandó viszonyban vannak. Feladatunknak czélja a megadott kúpszelethez 1. olyan egyenest és pontot, 2. olyan síkot és pontot, 3. olyan síkot és egyenest, végre 4. olyan két egyenest találni, hogy a kúpszelet pontjainak távolságai ezektől az elemektől állandó viszonyban legyenek.

I. A kúpszelet, mint geometriai helye azoknak a pontoknak, a melyeknek távolságai egy egyenestől és egy ponttól állandó viszonyban vannak.

Induljunk ki egy czentralis kúpszeletből $d^{(2)}$-ből (1. és 2. ábra), a melynek főtengelyén levő csúcsai SS_1, egyik gyújtópontja az F pont, az F-hez tartozó vezérlő vonala az f egyenes és ennek metszéspontja a főtengelylyel G. A $d^{(2)}$ kúpszelet valamelyik P pontjából az f vezérlő vonalra bocsátott merőlegesnek talppontja a Q. Az FQ egyenes az SS_1 csúcsoknak érintőit a TT_1 pontokban metszi.

A $d^{(2)}$ kúpszeletnek az F gyújtópontra és az f vezérlő vonalra vonatkozó tulajdonsága miatt

$$\frac{PF}{PQ}=\frac{SF}{SG}=\frac{S_1F}{S_1G}=\lambda,$$

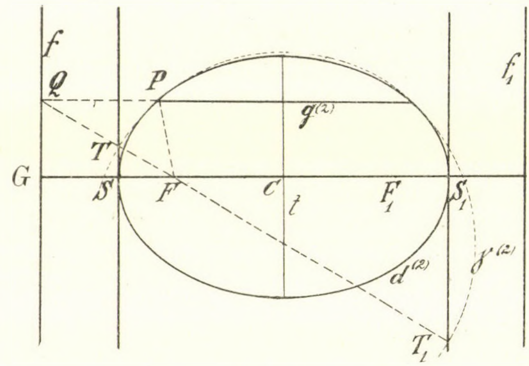
és a szerkesztés folytán

$$\frac{SF}{SG}=\frac{TF}{TQ},\quad \frac{S_1F}{S_1G}=\frac{T_1F}{T_1Q},$$

azért

$$\frac{PF}{PQ}=\frac{TF}{TQ}=\frac{T_1F}{T_1Q}=\lambda.$$

Ebből következik, hogy a P pont a TT_1 átmérő fölött leírt $\gamma^{(2)}$ gömbön fekszik. E $\gamma^{(2)}$ gömbnek pedig az a tulajdonsága,

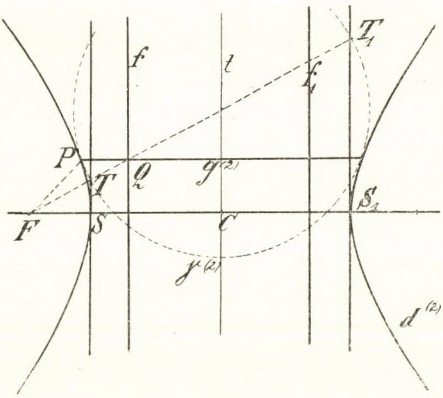


1. ábra.

hogy pontjainak távolságai az F és Q ponttól ugyanolyan viszonyban vannak, mint a P pontnak távolsága az F és Q ponttól, azaz λ viszonyban.

Messük a $\gamma^{(2)}$ gömböt az f-re merőleges síkkal a $g^{(2)}$ körben. Ha az X pontja a $g^{(2)}$-nek, úgy $XF:XQ$ is egyenlő λ-val, és mert az XQ egyenes merőleges az f-re a Q pontban, tehát XQ az X pontnak távolsága az f egyenestől, azért a $g^{(2)}$ kör pontjainak távolságai az F ponttól és az f egyenestől λ viszonyban vannak.

Ha a P pontot változtatjuk a $d^{(2)}$ kúpszeleten, akkor ezzel a $\gamma^{(2)}$ gömbök és a $g^{(2)}$ körök is változnak, de úgy, hogy bármelyik $g^{(2)}$ kör pontjainak távolságai az F ponttól és az f egyenestől λ viszonyban maradnak. Minthogy a $\gamma^{(2)}$ gömböknek és a $g^{(2)}$ körök-nek középpontjai a $d^{(2)}$ kúpszeletnek t melléktengelyén vannak, azért a $g^{(2)}$ körök ugyanazt a felületet írják le, mint a melyet a $d^{(2)}$ kúpszelet leír, ha azt a t melléktengelye körül forgatjuk. A $g^{(2)}$ körök tehát vagy forgásellipsoidon vagy egyágú forgáshiperboloidon vannak a szerint, a mint a $d^{(2)}$ ellipsis vagy hiperbola, azaz $\lambda \lesseqgtr 1$. Ez a forgásellipsoid pedig az ellipsisnek melléktengelye körül történő forgása által jön létre, tehát az úgynevezett *szféroid*.



2. ábra.

A talált eredményt ezután következő tételbe foglalhatjuk:

A szféroidnak és az egyágú forgáshiperboloidnak az a tulajdonsága van, hogy pontjainak távolságai bármelyik meridiánjának egyik gyújtópontjától F-től, és az ahhoz tartozó vezérlő vonaltól f-től, állandó viszonyban vannak. Ez a viszony λ az első esetben kisebb, a másodikban nagyobb, mint 1.

Vagy:

Azoknak a pontoknak a geometriai helye, melyeknek távolságai valamely F pontból és valamely f egyenestől adott λ viszonyban vannak, sféroid vagy egyágú forgáshiperboloid, a szerint a mint $\lambda \lesseqgtr 1$.

2. Lássuk most a $\lambda = 1$ esetet, azaz *vizsgáljuk meg, hogy mi a geometriai helye azoknak a pontoknak, a melyek egy F ponttól és egy f egyenestől egyenlő távolságra vannak.*

Jelöljük valamely $d^{(2)}$ parabolának gyújtópontját F-fel, vezérlő vonalát f-fel, és fektessünk a $d^{(2)}$-n keresztül oly hengert, melynek alkotói merőlegesek a $d^{(2)}$-nek síkjára. E parabolikus henger tetszésszerinti P pontjából a $d^{(2)}$-nek síkjára és az f egyenesre bocsátott merőlegeseknek talppontja P', illetve Q oly helyzetű, hogy $P'F = P'Q$. És mert a $PP'F$, $PP'Q$ derékszögű háromszögek kongruensek, azért

$$PF = PQ.$$

Tekintve, hogy a $d^{(2)}$ parabola a parabolikus hengernek minden normális metszésével pótolható, mondhatjuk:

A parabolikus hengernek pontjai egyenlő távolságra vannak a henger bármelyik normális metszésének gyújtópontjától és az ahhoz tartozó vezérlő vonaltól.

3. A $\lambda = 1$ esetben tehát a keresett felület *parabolikus henger.* Ezt különben közvetetlenül is beláthatjuk:

Ugyanis, ha a $d^{(2)}$ parabolát, úgy mint az előbbi két esetben az ellipszist és a hiperbolát, a végtelen távol fekvő melléktengelye körül forgatjuk, akkor ez a forgatás a $d^{(2)}$ síkjára merőleges egyenes irányában való *eltolásba (translatioba)* korcsosul el; az eltolt parabola pedig leírja az elkorcsosult forgásfelületet, t. i. a parabolikus hengert. Ennek normális metszései képezik az elkorcsosult forgásfelületnek meridiánjait. A szféroid is az egyágú forgáshiperboloid meridiánjainak főtengelyei e felületek *fősíkjában (aequatorsíkjában)* vannak; ugyanígy a parabolikus henger normális metszéseinek főtengelyei a parabolikus henger fősíkjában vannak.

A szféroid és az egyágú forgáshiperboloid meridiánjainak gyújtópontjai e felületeknek *fokális körén*, a vezérlő vonalai pedig a felület *vezérlő hengerén* vannak. A parabolikus henger normális metszéseinek gyújtópontjai a henger *fokális egyenesén*, a vezérlő vonalak pedig a henger *vezérlő síkján* vannak. Mindezen esetekben a vezérlő vonalak az illető felület fősíkjára merőlegesek.

4. Messük a szféroidot, az egyágú forgáshiperboloidot, vagy a parabolikus hengert egy tetszésszerinti ε síkkal az $e^{(2)}$ kúpszelet

szerint. Az $e^{(2)}$ pontjainak távolságai az illető felület fokális körének vagy egyenesének bármely F pontjától és e ponthoz tartozó f vezérlő vonaltól λ állandó viszonyban vannak, mely viszony a három esetet véve kisebb, nagyobb vagy egyenlő 1-gyel.

A szféroidnak minden síkmetszése ellipszis vagy kör, a parabolikus hengernek minden síkmetszése parabola vagy egy párhuzamos egyenespár, végre az egyágú forgáshiperboloidnak síkmetszései ellipszisek, hiperbolák, parabolák és ezeknek elkorcsosulásai: körök, metsző- vagy párhuzamos egyenespárok lehetnek. Másrészt a szféroid elliptikus metszésének főtengelye, a parabolikus henger parabolikus metszésének főtengelye, az egyágú forgáshiperboloid elliptikus metszésének melléktengelye, parabolikus metszésének csúcsérintője, végre a hiperbolikus metszésének fő- vagy melléktengelye párhuzamos az illető felület fősíkjával.

Ebből következik:

Azoknak a pontoknak a geometriai helye az ε síkban, melyeknek távolságai a síktól független helyzetű F ponttól és f egyenestől állandó viszonyban (λ-ban) vannak, egy $e^{(2)}$ kúpszeleten feküsznek. Ez a kúpszelet mindig ellipsis, ha $\lambda < 1$; mindig parabola, ha $\lambda = 1$; végre lehet ellipsis, parabola vagy hiperbola, ha $\lambda > 1$.

Az első esetben ($\lambda < 1$), az ellipszisnek főtengelye, a második esetben ($\lambda = 1$), a parabolának tengelye, a harmadik esetben ($\lambda > 1$), az ellipsizsnek melléktengelye, a parabolának csúcsérintője, a hiperbolának egyik vagy másik tengelye merőleges az f egyenesre.

Ha az f egyenes merőleges az ε síkra, akkor az első és harmadik esetben az ellipszis körbe, a második esetben pedig a parabola egyenesbe megy át.

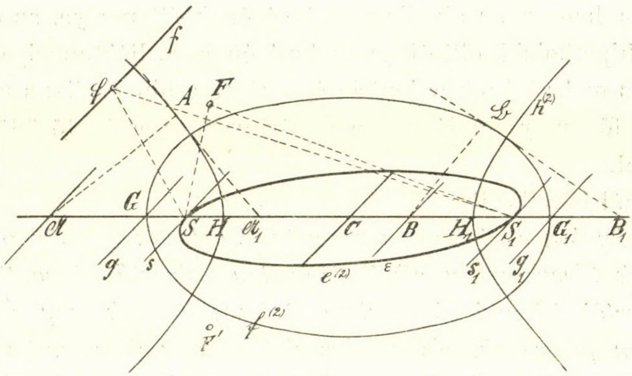
Miután az eddigiekből felismertük, hogy a kúpszeletek nemcsak gyújtópontjai és vezérlő vonalai, hanem más pontok és egyenesek irányában is oly tulajdonságúak, hogy pontjainak távolságai e pontoktól és egyenesektől állandó viszonyban vannak, a következő feladatot szándékunk megoldani:

Adva lévén az ε síkban az $e^{(2)}$ kúpszelet, határozzuk meg az f egyeneshez az F pontot, vagy az F ponthoz az f egyenest úgy, hogy az $e^{(2)}$ kúpszelet pontjainak távolságai az F ponttól és az f egyenestől állandó viszonyban legyenek.

5. *Vegyük fel először, hogy az $e^{(2)}$ ellipszis, az f egyenes pedig párhuzamos az $e^{(2)}$-nek melléktengelyével* és vagy az $e^{(2)}$-nek ε síkjában, vagy azon kivül van.

Az $e^{(2)}$ ellipsisen oly sféroidot akarunk keresztül fektetni,

1. melynek $d^{(2)}$ meridiánja hasonló az $e^{(2)}$-höz;



3. ábra.

2. mely $d^{(2)}$ meridiánnak valamelyik F gyújtópontjához tartozó vezérlő vonala az f egyenes, végre
3. mely sféroidnak M középpontja az $e^{(2)}$-nek C középpontjában annak ε síkjára emelt m merőlegesen van.

Jelöljük az $e^{(2)}$-nek (3. ábra) fő- és melléktengelyét $2a$ és $2b$-vel, exczentriczitását c-vel, a főtengelyén levő csúcsokat SS_1-gyel, a főtengelyén keresztül menő és az ε síkra merőleges síkot δ-val, végre az f egyenes és a δ sík metszőpontját $\mathfrak{F}$-fel.

Az $e^{(2)}$ pontjainak távolságai a saját vezérlő vonalától és az ehhez tartozó gyújtóponttól az $a:c$ viszonyban vannak. Ennyi a $d^{(2)}$ délő pontjainak, valamint a sféroid összes pontjainak az f egyenestől és a keresendő F ponttól mért távolságai viszonya. Ezért

$$\frac{S\mathfrak{F}}{SF} = \frac{S_1\mathfrak{F}}{S_1F} = \frac{a}{c}. \qquad 1)$$

Ha tehát a δ síkban az S és S_1 pontokból megfelelően az

$$SF = S\mathfrak{F}\cdot\frac{c}{a} \quad \text{és} \quad S_1F = S_1\mathfrak{F}\cdot\frac{c}{a} \qquad 2)$$

radiuszokkal leírt körök egymást az F és F' pontokban metszik, akkor az $[fF]$ és $[fF']$ síkok már a keresett $d^{(2)}$ és $d'^{(2)}$ meridiánoknak síkjai; az f és F, valamint az f és F' pedig az azokhoz tartozó vezérlő vonalak és gyújtópontok, végre az $e^{(2)}$ középpontjában az $e^{(2)}$-nek síkjára emelt m merőleges e meridiánsíkokat a meridiánoknak középpontjában metszi.

A $d^{(2)}$ és $d'^{(2)}$ meridiánok egy-egy szféroidot határoznak meg; az első sféroid pontjainak távolságai az f és F-től, a második szféroid pontjainak távolságai az f és F'-től, végre az $e^{(2)}$ ellipszis pontjainak távolságai az f és F-től, valamint az f és F'-től az $a:c$ viszonyban vannak. Az FF' pontok szimmetrikus fekvésűek az $e^{(2)}$-nek síkjára vonatkozólag, tehát az egyik pont már meghatározza a másikat.

6. Vizsgáljuk most meg, hogy mikép változnak az F pontok, az $e^{(2)}$ ellipszis melléktengelyével párhuzamos f egyenesnek változásával. E végből csak az F pontnak és annak az $\mathfrak{F}$ pontnak együttes változását kell közelebbről megvizsgálnunk, a mely $\mathfrak{F}$ pontban az f egyenes az $e^{(2)}$-nek főtengelyén keresztül menő és síkjára merőleges δ síkot metszi.

Már a 2) egyenlet mutatja, hogy ha az $\mathfrak{F}$ pont az S (vagy az S_1) pont körül konczentrikus köröket ír le a δ síkban, akkor az F pont is az S (illetve az S_1) pont körül szintén konczentrikus köröket ír le a δ síkban és a két összetartozó kör radiusának $S\mathfrak{F}$- és SF-nek (vagy $S_1\mathfrak{F}$- és S_1F-nek) viszonya $a:c$.

Az 1) és 2) egyenletekből következik, hogy

$$\frac{S\mathfrak{F}}{S_1\mathfrak{F}} = \frac{SF}{S_1F} \qquad 3)$$

vagy

$$\pm (S\mathfrak{F} \pm S_1\mathfrak{F}) = \pm \frac{a}{c} (SF \pm S_1F). \qquad 4)$$

A 3) egyenlet azt fejezi ki, hogy ha az $\mathfrak{F}$ pont oly kört ír le, a melynek középpontja az $e^{(2)}$ ellipszisnek SS_1 főtengelyén van, és a melyre vonatkozólag az SS_1 pontok kapcsolt pólusok, akkor az F pont is ugyanazt a kört írja le. Vagy más szóval kifejezve: «Az $\mathfrak{F}$ és F pontok egyidejűleg írják le annak a körseregnek egyes köreit a δ síkban, melynek nullakörei az $e^{(2)}$ ellipszisnek SS_1 csúcspontjai».

A 4) egyenletből pedig következik: Ha az $\mathfrak{F}$ pont a δ síkban annak a konfokális kúpszeletseregnek egy kúpszeletét írja le, a melynek gyújtópontjai az SS_1, akkor az F pont ugyanennek a kúpszeletseregnek egy másik kúpszeletét írja le. Ily két összetartozó kúpszelet a seregben egyidejűleg ellipsis, vagy hiperbola és főtengelyeinek viszonya $a : c$.

Lássuk, hogy milyenek e konfokális kúpszeletseregben a határkúpszeleteknek megfelelő kúpszeletei.

Ha először az $\mathfrak{F}$ pont azt az $\mathfrak{f}^{(2)}$ ellipszist írja le a konfokális seregben, melynek főtengelye $\frac{2a^2}{c}$, tehát melléktengelye $\frac{2ab}{c}$, akkor, minthogy

$$S\mathfrak{F} + S_1\mathfrak{F} = \frac{2a^2}{c},$$

az $\mathfrak{f}^{(2)}$-hez tartozó ellipszisnek főtengelye

$$SF + S_1F = 2a,$$

az F pont az $e^{(2)}$ ellipszisnek SS_1 főtengelyévé elkorcsosult ellipszist írja le.

Minden az $\mathfrak{f}^{(2)}$-ön kívül fekvő $\mathfrak{F}$ ponthoz egy valós F pont tartozik; az $\mathfrak{f}^{(2)}$-ön fekvő $\mathfrak{F}$ pontokhoz az $e^{(2)}$ ellipsis főtengelyén a HH_1 gyújtópontjaitól határolt vonaldarab pontjai tartoznak, végre az $\mathfrak{f}^{(2)}$-ön belül levő $\mathfrak{F}$ pontokhoz már nem találhatók valós F pontok.

Ha másodszor az $\mathfrak{F}$ pont az $e^{(2)}$ főtengelyének a vezérvonaktól határolt véges vonaldarabján kívül fekvő részét írja le, akkor az F pont az $e^{(2)}$ ellipszisnek fokális hiperboláját $h^{(2)}$-őt írja le, mert

$$\pm (S\mathfrak{F} - S_1\mathfrak{F}) = 2a$$

egyenletből következik, hogy

$$\pm (SF - S_1F) = 2c.$$

Az olyan F ponthoz tehát, mely a $h^{(2)}$ hiperbolán belül van nem tartozik valós $\mathfrak{F}$ pont; a $h^{(2)}$ hiperbola F pontjaihoz az $e^{(2)}$ ellipsis főtengelyének az $\mathfrak{f}^{(2)}$ ellipsis GG_1 csúcsaitól határolt véges részen kívül fekvő $\mathfrak{F}$ pontok tartoznak.

Ezek szerint: Az $\mathfrak{F}$ pontok a δ síknak az $\mathfrak{f}^{(2)}$-ön kívül fekvő részét, és az F pontok a δ síknak a $h^{(2)}$-ön kívül fekvő részét töltik be. Az $\mathfrak{f}^{(2)}$-őn kívül és a $h^{(2)}$-őn belül csak $\mathfrak{F}$ pontok, a $h^{(2)}$-őn kívül és az $\mathfrak{f}^{(2)}$-őn belül csak F pontok, végre az $\mathfrak{f}^{(2)}$ és $h^{(2)}$ kívüli részen $\mathfrak{F}$ és F pontok vannak. Az SS_1 főtengely pontjainak, mint az $\mathfrak{F}$-ekhez vagy az F-ekhez tartozó pontoknak a $h^{(2)}$-nek F pontjai, illetve az $\mathfrak{f}^{(2)}$-nek $\mathfrak{F}$ pontjai tartoznak.

7. Vegyük fel a $h^{(2)}$ hiperbolán az A pontot az $\mathfrak{f}^{(2)}$ ellipszisen kívül. Messe az A-nak a $h^{(2)}$-hez tartozó normálisa és érintője az $e^{(2)}$ ellipsisnek SS_1 főtengelyét az $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$ pontokban. Az $A\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ derékszögű háromszög körül írt kör ahhoz a körsereghez tartozik, melynek nullakörei az SS_1 pontok. Ebből tekintettel az előbbiekre (6) következik, hogy az $\mathfrak{A}$ pontnak, mint $\mathfrak{F}$ pontnak, az A pont, mint F pont felel meg. Azaz:

Ha az $e^{(2)}$ ellipszis fokális hiperbolájának, $h^{(2)}$-nek, valamely F pontjában a normális sík az $e^{(2)}$ síkját az f egyenesben metszi, akkor az $e^{(2)}$ ellipszis pontjainak távolságai az F ponttól és az f egyenestől oly viszonyban vannak, mint az $e^{(2)}$ ellipsis pontjainak távolságai az egyik gyújtópontjától és az ahhoz tartozó vezérlő vonaltól.

Vagy:

Az $e^{(2)}$ ellipszis fokális hiperbolájának, $h^{(2)}$-nek, bármelyik F pontját gyújtópontnak tekinthetjük; e gyújtópontokhoz tartozó f vezérlő vonal az az egyenes, a melyben az F pontnak a $h^{(2)}$-hez tartozó normális síkja az $e^{(2)}$-nek síkját metszi. Az $e^{(2)}$

pontjainak távolságai az ily összetartozó F és f gyújtópontoktól és vezérlő vonalaktól állandó viszonyban vannak.

Az f vezérlő vonalakon fekvő és az $e^{(2)}$-re vonatkozó kapcsolt pólusokból álló pontinvolucziό a hozzátartozó F gyújtópontból orthogonális sugárinvolutzióval projicziáltatik.

E tétel utolsó részét, mely a kúpszeletnek közönséges vezérlő vonaláról és gyújtópontjáról rég ismeretes, ekkép igazolhatjuk:

Az $e^{(2)}$ ellipszisen keresztül fektetjük azt a sféroidot, melynek meridiánsíkja az $[fF]$ sík, és melynek tehát e meridiánsíkban fekvő $d^{(2)}$ meridiánjára vonatkozólag az f egyenes és az F pont a közönséges vezérlő vonal és gyújtópont. Az f-en a $d^{(2)}$-re vonatkozó kapcsolt pólusokból álló pontinvolucziό az F-ből orthogonális sugárinvolucziόval projicziáltatik. De ama pontinvolucziónak társpontjai a sféroidnak és így az $e^{(2)}$ kúpszeletnek is kapcsolt pólusai, tehát a tétel igazolva van. —

Vegyünk fel folytatólag az $\mathfrak{f}^{(2)}$ ellipszisen, a $h^{(2)}$ hiperbolán kívül egy $\mathfrak{B}$ pontot. Ennek, mint az $f^{(2)}$-hez tartozó pontnak normálisa és érintője az SS_1 tengelyt a BB_1 pontokban metszi és a $\mathfrak{B}BB_1$ derékszögű háromszög körül írt kör ahhoz a körsereghez tartozik, melynek nullakörei az SS_1 pontok. Ebből ismét az következik, hogy a $\mathfrak{B}$ pontnak, mint $\mathfrak{F}$ pontnak, a B pont mint F pont felel meg.

Azaz: *Ha az $e^{(2)}$ ellipszishez egy $F^{(2)}$ elliptikus hengert szerkesztünk, melynek az $e^{(2)}$ síkjában fekvő alkotói az $e^{(2)}$-nek közönséges vezérlő vonalai g és g_1 és fokális sugarai s és s_1 az $e^{(2)}$ főtengelyén levő SS_1 csúcsainak érintői, akkor az $e^{(2)}$ ellipszis pontjainak távolságai az $F^{(2)}$ henger bármelyik f alkotójától és attól az F ponttól, a melyben az f alkotónak normális síkja az $e^{(2)}$-nek főtengelyét metszi, állandó viszonyban vannak. Minden a henger alkotóihoz párhuzamos és a hengeren kívül levő f egyeneshez egy valós F pont tartozik, a melytől és az illető f egyenestől az $e^{(2)}$ ellipszis pontjainak távolságai állandó viszonyban vannak.*

8. Vegyünk fel ezután egy $e^{(2)}$ *hiperbolát.* Az $e^{(2)}$-ön végtelen

sok egyágú forgáshiperboloidot fektethetünk keresztül, melynek meridiánjai hasonlók az $e^{(2)}$-vel. Az $e^{(2)}$ pontjainak távolságai e hiperboloidok meridiánjainak f vezérlő vonalaitól és az ezekhez tartozó F gyújtópontoktól állandó viszonyban vannak. Az előbbi eljárással analogus úton kimutatható, hogy:

Ha az $e^{(2)}$ hiperbolához egy $F^{(2)}$ hiperbolikus hengert szerkesztünk, melynek csúcsalkotói az $e^{(2)}$-nek közönséges vezérlő vonalai és melynek fokális sugarai az $e^{(2)}$-nek SS_1 csúcsainak érintői, akkor minden a henger alkotóihoz párhuzamos f egyeneshez, mely nincs a hengeren belől, a hiperbola fokális ellipszise síkjának abban a részében, mely nincsen ezen ellipszisen belől, egy olyan valós F pont tartozik, hogy az $e^{(2)}$ hiperbola pontjainak távolságai az f-től és az F-től állandó viszonyban vannak; ez a viszony olyan, mint az $e^{(2)}$ hiperbola főtengelyének és kettős exczentriczitásának viszonya.

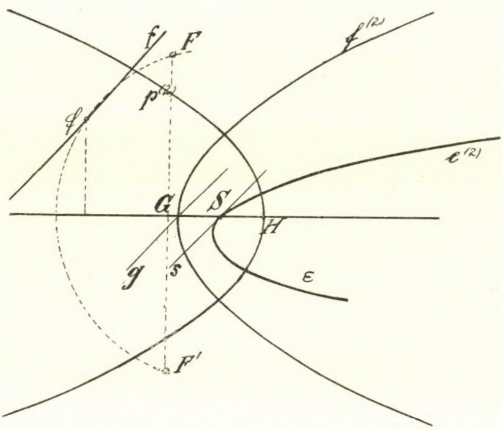
Az $F^{(2)}$ henger alkotóihoz, mint f egyenesekhez azok az F pontok tartoznak, a melyben az illető hengeralkotók normális síkjai az $e^{(2)}$-nek főtengelyét metszik; minden az $e^{(2)}$ síkjában levő f egyeneshez az a két pont tartozik a fokális ellipszisen, a melynek normális síkja az illető f-en megy keresztül. Ez utóbbi egyeneseken az $e^{(2)}$-nek kapcsolt pólusaitól képezett pontinvolucziók az illető F pontokból orthogonális sugárinvolucziókkal projicziáltatnak.

9. Vegyünk fel végre egy $e^{(2)}$ *parabolát* (4. ábra), melynek csúcsa és gyújtópontja S és H, és vizsgáljuk meg a parabola csúcsérintőivel párhuzamos f egyeneseknek és azoknak az F pontoknak kölcsönös helyzetét, melyektől a parabola pontjai egyenlő távolságra vannak.

Fektessünk e végből az $e^{(2)}$-n keresztül egy oly parabolikus hengert, a melynek δ fősíkja az $e^{(2)}$-nek tengelyén megy keresztül merőlegesen az $e^{(2)}$-nek ε síkjára, és melynek alkotói az ε síkhoz φ szög alatt hajlanak. Az $e^{(2)}$ parabolának pontjai e henger minden normális metszésének f vezérlő vonalától és F gyújtópontjától egyenlő távolságra vannak. Az f egyenesnek és az F pontnak távolsága egymástól $2 . SH : \sin\varphi$, és így az f

egyenes és az F pont derékszögű projekcziójának az ε síkra távolsága egymástól $2 . SH$.

Ha tehát az $e^{(2)}$ parabola, valamint annak csúcsérintőjével párhuzamos f egyenes adva van és a parabola tengelyén keresztülmenő és az f-re merőleges δ síkban a parabola S csúcsából kört írunk le, mely az f egyenest metszi, akkor e körnek F és F' metszéspontjai azzal a síkkal, mely a parabola tengelyére merőleges és az f-től ép oly távolságra, mint a parabolának



4. ábra.

gyújtópontja annak vezérlő vonalától, már oly tulajdonságú, hogy a parabola pontjai az F és f-től vagy az F' és f-től egyenlő távolságra vannak.

Nem minden az $e^{(2)}$ parabola csúcsérintőjével párhuzamos f egyeneshez tartozik egy valós F pont, hanem csak azokhoz az f egyenesekhez, melyek nincsenek egy bizonyos parabolikus hengeren belől. E parabolikus hengernek csúcsalkotója az $e^{(2)}$-nek vezérlő vonala, fokális egyenes pedig az $e^{(2)}$-nek csúcsérintője.

Az $e^{(2)}$ parabola síkjában levő és annak csúcsérintőjével párhuzamos f egyenesekhez, az $e^{(2)}$ parabolának fokális parabolájan fekvő F pontok tartoznak. Az ily összetartozó f egyenesnek és F pontnak közös síkja, normális síkja a fokális parabolának az illető F pontban. E mellett az ily f-en az $e^{(2)}$-re vonatkozó kapcsolt pólusok involucziója az F pontból orthogonális sugárinvoluczióval projicziáltatik.

Ezek után mondhatjuk:

Ha az $e^{(2)}$ parabolához egy $F^{(2)}$ parabolikus hengert szerkesztünk, a melynek csúcsalkotója az $e^{(2)}$-nek g vezérlő vonala és a melynek fokális egyenese az $e^{(2)}$-nek csúcsérintője, akkor minden a henger alkotóihoz párhuzamos f egyeneshez, mely nincsen a hengeren belől, az $e^{(2)}$ parabolához tartozó $p^{(2)}$ fokális parabola síkjának abban a részében, mely nincsen e parabolán belül, egy olyan F pont tartozik, hogy az $e^{(2)}$-nek pontjai az f-től és az F-től egyenlő távolságra vannak.

Az $F^{(2)}$ henger alkotóihoz azok az F pontok tartoznak, a melyben az illető hengeralkotók normális síkjai az $e^{(2)}$-nek főtengelyét metszik; minden az $e^{(2)}$ síkjában levő és $F^{(2)}$-nek alkotóival párhuzamos f egyeneshez az a két F pont tartozik, a melynek normális síkja az illető f-en megy keresztül. Ez utóbbi egyeneseken az $e^{(2)}$-nek kapcsolt pólusaitól képezett pontinvolucziók az illető F pontokból orthogonális sugárinvolucziókkal projicziáltatnak.

Ezzel bevégeztük a tárgyalást az oly f egyenesekre nézve, a melyek az adott $e^{(2)}$ kúpszeletnek vezérlő vonalaival párhuzamosak, és áttérhetünk az általános eset tárgyalásához, tehát ahhoz az esethez, a melyben az f egyenes a kúpszelet síkjához egy adott φ szög alatt hajlik, és 4) a kúpszeletnek egyik vagy másik tengelyére merőleges.*

* Ide iktatjuk még a 7—9-ben foglalt tételeknek közvetlen bebizonyítását oly f egyenesekre, a melyek az $e^{(2)}$ kúpszelet síkjában vannak és annak vezérlő vonalához párhuzamosak. A bebizonyítás következő tételen alapszik:

«Az $e^{(2)}$ kúpszelet, fokális kúpszeletének bármely F pontjából oly $F^{(2)}$ forgáskúppal projicziáltatik, a melynek forgástengelye az F pontnak a fokális kúpszelethez tartozó érintője.»

Messe az F pontnak normális síkja, tehát az $F^{(2)}$ forgáskúp forgástengelyére merőleges φ sík, az $e^{(2)}$ kúpszelet síkját az f egyenesben. Az $e^{(2)}$ kúpszelet két tetszésszerinti pontjából, A és B-ből, az f-re bocsátott merőlegeseknek talpa A_1 és B_1; végre $(AB, f) \equiv C$.

10. A δ síkban felveszszük a $d^{(2)}$ ellipsist (5. ábra). Ennek középpontja a C, fő- és melléktengelye NN', TT'; egy kapcsolt átmérőpárja RR', UU'.

A δ síkban az RR' pontokon keresztül ∞^1 oly $d_i^{(2)}$ ellipszist vezethetünk, a mely a $d^{(2)}$-hez hasonló és hasonló fekvésű; mindezeknek C_i középpontjai az UU' átmérőn vannak. Az UU' egyenesen felvett C_i ponthoz a $d_i^{(2)}$ ellipsisnek N_iN_i' főtengelyét ekkép határozzuk meg: A C_iR, C_iR' félsugarakkal párhuzamosakat vezetünk a C ponton keresztül; ezek a $d^{(2)}$-őt az R_i, R pontokban metszik; az R-en és az R'-ön keresztül az R_iN, illetve az $R_i'N$-nel párhuzamosan haladó egyenesek egymást az N_i-ben, míg az R-en és az R'-ön keresztül az R_iN'-sel, illetve az $R_i'N'$-sel párhuzamosan haladó egyenesek egymást az N_i' pontban metszik, és az N_iN_i' főtengelye a $d_i^{(2)}$ ellipsisnek.

Ugyanis a $d_i^{(2)}$ és $d^{(2)}$ ellipszisek hasonlósága és hasonló fekvése folytán a $d_i^{(2)}$-nek mezőjéhez tartozó $RR'C_i$ háromszögnek megfelel a $d^{(2)}$-nek mezőjéhez tartozó $R_iR_i'C$ háromszög, és ez utóbbi mezőben levő $NR_iR_i'N'$ négyszögnek megfelel amabban az $N_iRR'N_i'$ négyszög, és így mert az NN' főtengelye a $d^{(2)}$-nek: az N_iN_i' főtengelye a $d_i^{(2)}$-nek.

Az $[Ff]$ síkban fekvő CF egyenes az AF, BF kúpalkotókhoz, mint az ABF háromszög oldalaihoz egyenlő szögek alatt hajlik, tehát

$$AF : BF = AC : BC = AA_1 : BB_1$$

és így
$$AF : AA_1 = BF : BB_1 = \text{állandó},$$

a mi az f egyenesekre vonatkozó tételek egyik részét igazolja.

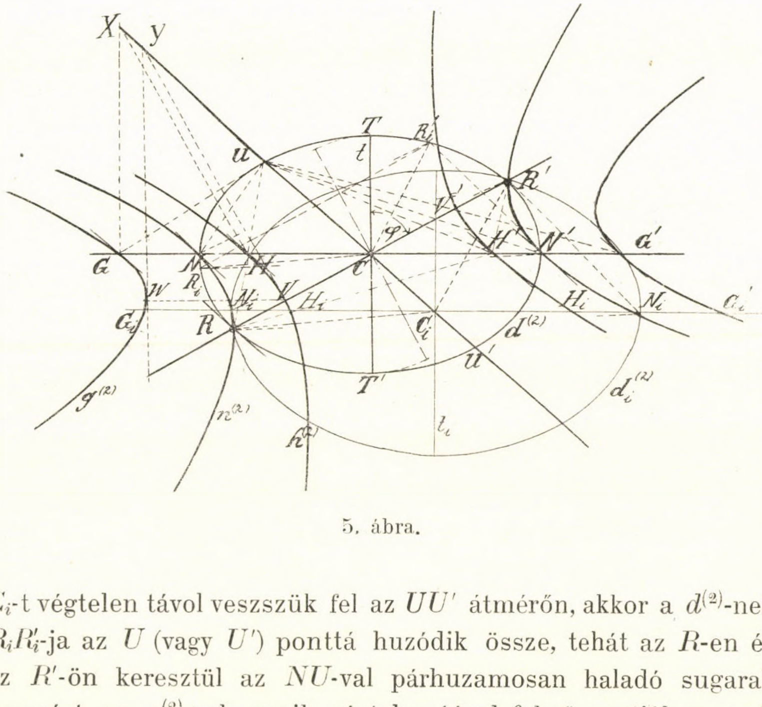
A másik rész közvetlen belátható, mert a forgáskúp forgástengelyére merőleges fősíkban a kapcsolt polárisok orthogonális sort képeznek, tehát az f egyenesen az $e^{(2)}$-re vonatkozó kapcsolt pólusok az F ponttól derékszögű sugárpárokkal projicziáltatnak. E szerint mondhatjuk:

Ha valamely ε sík egy forgáskúpot és annak a tengelyére a csúcsban merőlegesen álló síkot az $e^{(2)}$ kúpszeletben és az f egyenesben metszi, akkor a kúpszelet pontjainak távolságai a kúp csúcsától és az f egyenestől állandó viszonyban vannak.

A tétel még általánosabban is kifejezhető ekképpen:

«Ha a forgáskúpon fölveszszük az $e^{(2)}$ kúpszeletet és a $k^{(2)}$ kört, a melyeknek síkjai egymást az f egyenesben metszik, akkor az $e^{(2)}$ pontjainak távolságai az f egyenestől és a $k^{(2)}$ körtől (a kúpalkotón mérve) állandó viszonyban vannak.»

Változtassuk a C_i pontot az UU' átmérőn. Ezzel az RR'-sel párhuzamos $R_iR'_i$ húrok is változnak és az $R_iR'_i$ pontok projektiv pontsorokat írnak le a $d^{(2)}$ ellipsisen. Az NR_i, NR'_i sugarak projektiv sorokat írnak le az N körül; az ezekkel párhuzamos RN_i, $R'N_i$ sugarak pedig projektiv sorokat írnak le az R és R' pontok körül, tehát ez utóbbiak metszéspontjainak geometriai helye az $n^{(2)}$ kúpszelet. Ez az $n^{(2)}$ pedig hiperbola, mert ha a



5. ábra.

C_i-t végtelen távol veszszük fel az UU' átmérőn, akkor a $d^{(2)}$-nek $R_iR'_i$-ja az U (vagy U') ponttá huzódik össze, tehát az R-en és az R'-ön keresztül az NU-val párhuzamosan haladó sugarak egymást az $n^{(2)}$-nek egyik végtelen távol fekvő pontjában metszik, míg az $N'U$-val párhuzamosan haladó sugarak az $n^{(2)}$-nek második végtelen távol fekvő pontjában találkoznak. Az NU, $N'U$ egyenesek tehát párhuzamosak az $n^{(2)}$ hiperbolának asimptótáival.

Az $n^{(2)}$ hiperbola az NN' pontokon megy keresztül, mert a $d^{(2)}$ is egyike a $d_i^{(2)}$ ellipsziseknek. Az NN' átmérője az $n^{(2)}$-nek, mert az NN'-től egyenlő távolságra levő $N_iN'_i$ húrok egyenlők.

Az NN' és UU' átmérők kapcsoltak az $n^{(2)}$-re vonatkozólag, mert az $n^{(2)}$ aszimptótáival párhuzamos NU, $N'U$ egyenesek harmonikusan választják el az UU' átmérőt az NN'-nek végtelen távol fekvő pontjától. Az UU' pontpár kapcsolt póluspárja az $n^{(2)}$-nek, mert az $NUN'U'$ négyszög oldalai párhuzamosak az $n^{(2)}$-nek aszimptótáival. Az $n^{(2)}$ keresztül megy az RR' pontokon, mert ha az R_i pont az N-be jut, akkor az N_i az R-be kerül. Az RR', TT' szintén kapcsolt átmérőpárja az $n^{(2)}$-nek, mert a $d^{(2)}$ ellipszis U pontjának érintője és az U pontból az NN' főtengelyre bocsátott merőleges harmonikusan választja el az $n^{(2)}$ asimptótáival párhuzamos NU, $N'U$ egyeneseket. Az $RTR'T'$ parallelogrammának oldalai párhuzamosak az $NUN'U'$ parallelogrammának oldalaival, tehát a TT' pontpár is kapcsolt póluspárja az $n^{(2)}$-nek. —

A $d_i^{(2)}$ ellipsziseknek H_iH_i' gyújtópontjai egy $h^{(2)}$ hiperbolán vannak, mely az $n^{(2)}$-vel az UU' affinitási tengelyre vonatkozólag affin. A $h^{(2)}$ átmegy a $d^{(2)}$ ellipsisnek HH' gyújtópontjain, tehát az $n^{(2)}$ hiperbola NN', UU' kapcsolt átmérőinek megfelelnek az affinitásban a $h^{(2)}$-nek HH', UU' kapcsolt átmérői, és ezért a $h^{(2)}$-nek aszimptótái párhuzamosak a $HUH'U'$ parallelogrammának oldalaival.

A $d^{(2)}$ ellipsis U pontjának érintője és normálisa felezi az UH, UH' vonósugarak szögeit, tehát a $h^{(2)}$-nek VV' főtengelye ama érintővel párhuzamos RR' átmérőn van. S mert a HR, HR' egyenesek a $h^{(2)}$-nek érintőjéhez az R pontban (mely párhuzamos az UU'-sel) egyenlő szögek alatt hajlanak, és a $h^{(2)}$-nek főtengelyéről oly RR' vonaldarabot metszenek ki, a melynek felező pontja a C középpont, azért az RR' pontok gyújtópontjai a $h^{(2)}$-nek. A $d^{(2)}$ ellipszis és a $h^{(2)}$ hiperbola tehát oly kölcsönös helyzetű, hogy bármelyik a másiknak gyújtópontjain megy keresztül, és e gyújtópontokban az érintők párhuzamosak a közös UU' átmérővel.

A H gyújtópontból az R pont érintőjére, és az R gyújtópontból a H pont érintőjére bocsátott merőlegesnek talppontja az illető érintőn, a C középponttól oly távolságra van, mint $d^{(2)}$

ellipszisnek félfőtengelye, illetve a $h^{(2)}$ hiperbolának félfőtengelye. A H gyújtópontból az R és R' pontok érintőire bocsátott merőlegeseknek szorzata a $d^{(2)}$ félmelléktengelyének négyzete TC^2; míg az RR' gyújtópontokból a H pont érintőjére bocsátott és amazokkal egyenlő merőlegeseknek szorzata, a $h^{(2)}$ melléktengelyén levő kapcsolt pólusok involucziójának hatványa, azaz a $h^{(2)}$ hiperbola képzetes félmelléktengelyének négyzete. A $h^{(2)}$ hiperbola félfőtengelyének négyzete tehát $VC^2 = RC^2 - TC^2$; míg a félmelléktengelyének négyzete $-TC^2$. —

A $d_i^{(2)}$ ellipsziseknek vezérlő vonalai az illető főtengelyeket a $G_iG'_i$ pontokban metszik, melyeknek geometriai helye az $n^{(2)}$-vel és a $h^{(2)}$-vel az UU' affinitási tengelyre vonatkozó affin hiperbola $g^{(2)}$. Ez átmegy azokon a GG' pontokon, a melyekben a $d^{(2)}$-nek vezérlő vonalai az NN' főtengelyét metszik; egy kapcsolt átmérőpárja a GG', UU', és aszimptótái párhuzamosak a $GUG'U'$ parallelogrammának oldalaival.

A $d^{(2)}$ ellipszisnek a H gyújtópontjához tartozó vezérlő vonala az UU', NN' egyeneseket az X, G pontokban metszi. A HX egyenes merőleges az RR'-re, mert az X pontnak a $d^{(2)}$-re vonatkozó polárisa merőleges a HX-re és párhuzamos az RR'-sel. A $h^{(2)}$ és $g^{(2)}$ hiperbolák affinitásában a HX, GX egyenesek megfelelők, a $h^{(2)}$ hiperbola HX-szel párhuzamos érintőjének a V csúcsban, megfelel a GX-szel párhuzamos érintő a $g^{(2)}$-nek W pontjában, mely a V-nek megfelelő. Ha tehát a V csúcsban az RR'-re emelt merőleges az UU' affinitási tengelyt az Y pontban metszi, akkor az Y pontból az NN'-re merőlegesen bocsátott egyenes, a V pontból az NN'-sel párhuzamosan vezetett egyenest a $g^{(2)}$-nek W pontjában metszi és ebben a pontban az YW érintője a $g^{(2)}$-nek.

Az Y pontnak a $h^{(2)}$-re vonatkozó polárisa a WV egyenes, tehát YW és WV egy kapcsolt polárispárja a $h^{(2)}$-nek, és mert egymásra merőlegesek, azért a $h^{(2)}$-nek RR' gyújtópontjaitól harmonikusan vannak elválasztva. Az YW párhuzamos az $n^{(2)}$-nek az RR'-hez kapcsolt átmérőjével, tehát polárisa a V pontnak az $n^{(2)}$-re vonatkozólag. Ép így a H pontnak polárisa az

$n^{(2)}$-re vonatkozólag szintén érintője a $g^{(2)}$-nek, tehát a $g^{(2)}$, $h^{(2)}$ hiperbolák egymásnak poláris alakzatai az $n^{(2)}$-re nézve.

Ha a $d^{(2)}$ ellipszisnek NN' főtengelyét $2a$-val, TT' mellék-tengelyét $2\mathfrak{b}$-vel, RR' átmérőjét $2b$-vel, ezek hajlásszögének pótlószögét φ-vel jelöljük, és ha

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad \mathfrak{c}^2 = a^2 - \mathfrak{b}^2, \quad m^2 = a^2 - b^2 \sin^2\varphi,$$

akkor a $d^{(2)}$ ellipsisnek

$$\frac{b^2 \sin^2\varphi}{a^2} + \frac{b^2 \cos^2\varphi}{\mathfrak{b}^2} = 1$$

egyenletéből

$$\mathfrak{b} = \frac{ab \cos\varphi}{m}, \quad m = a \cdot \frac{c}{\mathfrak{c}}, \quad \cos\varphi = \frac{\mathfrak{b}}{b} \cdot \frac{c}{\mathfrak{c}},$$

végre bármelyik $d_i^{(2)}$ ellipszis pontjainak távolságai a saját gyújtópontjától és az ahhoz tartozó vezérlő vonaltól oly viszonyban vannak, mint $c : m$, vagy a véle egyenlő $\mathfrak{c} : a$.

A talált eredményeket pedig ekkép állíthatjuk egybe:

«Ha a $d^{(2)}$ ellipszisnek főtengelye NN', melléktengelye TT', két gyújtópontja HH', a vezérlő vonalak metszéspontjai a főtengelylyel GG', egy kapcsolt átmérőpárja RR', UU', akkor az RR' pontokon keresztül menő és a $d^{(2)}$-hez hasonló és hasonló fekvésű $d_i^{(2)}$ ellipsziseknek főtengelyén levő N_iN_i' csúcspontok egy $n^{(2)}$ hiperbolán, H_iH_i' gyújtópontjai egy $h^{(2)}$ hiperbolán, és vezérlő vonalainak G_iG_i' metszőpontjai az illető főtengelyekkel egy $g^{(2)}$ hiperbolán vannak.

Az $n^{(2)}$, $h^{(2)}$, $g^{(2)}$ hiperboláknak egyik átmérője az NN', HH', GG'; az ehhez kapcsolt átmérő az UU', és ezen az UU' egy kapcsolt póluspár mind a három hiperbolára nézve. Ama hiperbolának asimptótái tehát párhuzamosak az $NUN'U'$, $HUH'U'$, $GUG'U'$ parallelogrammáknak oldalaival. A $h^{(2)}$ hiperbolának gyújtópontjai az RR' pontok, melléktengelyének négyzete pedig egyenlő $-\overline{TT'}^2$-tel.

Az $n^{(2)}$, $h^{(2)}$, $g^{(2)}$ hiperbolák közül bármely kettő egymásnak affin alakzata; az UU' egyenes az affinitási tengely, a megfelelő pontokat összekötő egyenesek pedig az NN' egyenessel párhuzamosak. Végre a $g^{(2)}$ és $h^{(2)}$ egymásnak poláris alakzata az $n^{(2)}$-re vonatkozólag.»

Továbbá:

Valamely sík két pontján keresztül ∞^1 ellipszis vezethető, mely a síkban adott ellipszishez hasonló és hasonló fekvésű. Ezeknek gyújtópontjai egy hiperbolán vannak, melynek két gyújtópontja a két felvett pont, melléktengelyének negativ négyzete pedig oly nagy, mint ama hasonló ellipszisek legkisebbikének melléktengelye négyzetre emelve.

11. Forgassuk a $d^{(2)}$ ellipszist a $TT' \equiv t$ melléktengelye körül, úgyszintén a $d_i^{(2)}$ ellipsiseket is az illető melléktengelyek körül. A $d^{(2)}$ ekkor leír egy $D^{(2)}$ sféroidot, a $d_i^{(2)}$ ellipszisek pedig leirnak a $D^{(2)}$-hez hasonló és hasonló fekvésű $D_i^{(2)}$ szféroidokat. Mindezek a $D^{(2)}$ és $D_i^{(2)}$ sféroidok egymást egy $e^{(2)}$ véges és valós kúpszeletben és egy végtelen távol fekvő képzetes kúpszeletben metszik, mely valós kúpszeletnek ε síkja merőleges a $d_i^{(2)}$ ellipsziseknek δ síkjára, melynek melléktengelye RR' egyenlő $2b$-vel és a szféroidok forgástengelyeivel φ szöget képez, végre melynek SS' főtengelye egyenlő NN'-sel ($2a$-val) és exczentriczitása c.

A $D_i^{(2)}$ szféroidoknak æquatorai egy $N^{(2)}$ egyágú hiperboloidon, fokális körei egy $H^{(2)}$ egyágú hiperboloidon, vezérlő hengereinek metszőkörei az illető æquatorsíkokkal egy $G^{(2)}$ egyágú hiperboloidon vannak. A három hiperboloidnak egyik körtmetsző átmérősíkja a $D^{(2)}$ szféroidnak æquatorsíkja α; az ehhez kapcsolt átmérő mind a három hiperboloidra vonatkozólag az UU' és ezen UU' egy kapcsolt póluspár.

Az $N^{(2)}$ hiperboloid keresztül megy az $e^{(2)}$ ellipszisen; ennek ε síkjához, mint átmérősíkhoz a TT' kapcsolt átmérő, és ezen a TT' pontpár kapcsolt póluspár. A $H^{(2)}$ hiperboloidnak egyik fősikja az ε sík; ebben az elliptikus főmetszésnek főtengelye az SS'-ön van és egyenlő HH'-sel, az ε-ra merőleges tengelyének négyzete $-\overline{TT'}^2$, végre a $H^{(2)}$-nek az $e^{(2)}$ fokális ellipsise.

A $G^{(2)}$ hiperboloid poláris alakzata a $H^{(2)}$-nek az $N^{(2)}$-re vonatkozólag, mert a $G^{(2)}$, $H^{(2)}$, $N^{(2)}$ hiperboloidoknak az α síkkal párhuzamos körmetszései közül az első kettő egymásnak poláris alakzata a harmadikra vonatkozólag, továbbá e körtmetsző síkoknak a három hiperboloidra vonatkozólag mindig ugyanegy pólusa van az α-hoz kapcsolt UU' átmérőn.

Bármelyik $D_i^{(2)}$ sféroid pontjainak távolságai a saját fokális körének egy pontjától és az ehhez tartozó vezérlő vonaltól oly viszonyban vannak, mint $c:m$, ha $m^2=a^2-b^2\sin^2\varphi$.

Ebből forditva következik:

«Egy $e^{(2)}$ ellipszisen, melynek síkja ε, középpontja C, fő- és melléktengelye $SS'=2a$, $RR'=2b$, kettős excentriczitása $2c$, ∞^1 oly $D_i^{(2)}$ szféroid megy keresztül, melynek forgástengelyei egymással párhuzamosak, az SS' főtengelyre merőlegesek és az RR' melléktengelyhez φ szög alatt hajlanak. E szféroidoknak az RR'-ön keresztül menő és az SS' főtengelyre merőleges közös δ meridiánsíkjuk van: ebben a $d_i^{(2)}$ meridiánok az RR' pontokon mennek keresztül, hasonló és hasonló fekvésűek és ezért a D_i^{2} sféroidok is hasonlók és hasonló fekvésűek. E szféroidok egyikének, $D^{(2)}$-nek, középpontja a C, a δ síkban fekvő $d^{(2)}$ meridiánjának főtengelye $NN'=2a$, melléktengelye $TT'=2ab\cos\varphi:m$, (ha $m^2=a^2-b^2\sin^2\varphi$); HH' gyújtópontjainak távolsága $2ac:m$, az RR'-hez kapcsolt átmérője az UU'.

A $D_i^{(2)}$ szféroidnak æquatorai, fokális körei, vezérlő hengereinek metszései az illető æquatorsíkokkal megfelelőleg egy $N^{(2)}$, $H^{(2)}$ és $G^{(2)}$ egyágú hiperboloidon vannak. Ezeknek közös középpontja a C, közös átmérősíkja a $D^{(2)}$ sféroid æquatorának síkja α, az ehhez kapcsolt közös átmérőn a kapcsolt közös pólusok UU'; végre a $G^{(2)}$ és $H^{(2)}$ egymásnak poláris alakzata az $N^{(2)}$-re vonatkozólag. Az ε sík fősíkja a $H^{(2)}$-nek; az erre merőleges főtengelynek négyzete $-TC^2$; és az $e^{(2)}$ fokális ellipsise a $H^{(2)}$-nek.

Az $e^{(2)}$ ellipszis pontjainak távolságai a $H^{(2)}$ hiperboloid valamelyik pontjától, azaz az egyik $D_i^{(2)}$ sféroid fokális körének egy pontjától, és az ahhoz tartozó vezérlő vonaltól oly viszonyban vannak, mint $c:m$.

Ha a φ szöget változtatjuk, akkor ezzel a $D_i^{(2)}$ szféroidok sora s változik, valamint a $H^{(2)}$ hiperboloid, mely minden egyes sor sféroidjainak fokális köreit tartja. E $H^{(2)}$ hiperboloidok leirják azt a konfokális egyágú hiperboloidsereget, melynek az $e^{(2)}$ fokális ellipszise, és így betöltik az egész tért.»

Ezért:

Ha adva van az $e^{(2)}$-ellipsis és annak síkján kívül az F pont, akkor mindig lehet az ellipszis főtengelyére merőlegesen álló és a melléktengelyhez egy bizonyos φ szög alatt hajló oly f egyenest (és annak az $e^{(2)}$ síkjára vonatkozó f' tükörképét) találni, hogy az $e^{(2)}$ ellipszis pontjainak távolságai az F ponttól és az f (valamint az f') egyenestől $c:m$ viszonyban legyenek, ha $2a$ és $2b$ az $e^{(2)}$ ellipszis fő- és melléktengelye, $c^2=a^2-b^2$ és $m^2=$ $=a^2-b^2\sin^2\varphi$. Ez az f (és f') egyenes az ellipszis síkját az ellipsisen kívül metszi.

Fordítva:

Minden f egyenes, mely az $e^{(2)}$ ellipszis főtengelyére merőleges, a melléktengelyéhez φ szög alatt hajlik és az ellipszis síkját az ellipszisen kívül fekvő részben metszi, meghatároz egy oly F pontot (és annak F' tükörképét az $e^{(2)}$ síkjára vonatkozólag), hogy az ellipszis pontjainak távolságai az F (vagy az F') ponttól és az f egyenestől $c:m$ állandó viszonyban vannak.

Jegyzet.

1) *Ha* $\varphi=0$, akkor az előbbi tételben említett $d^{(2)}$ ellipszis az $e^{(2)}$-nek az RR' melléktengely körül 90°-kal elforgatott helyzete; az $e^{(2)}$ tehát meridiánja a $D^{(2)}$ szféroidnak.

A $D_i^{(2)}$ szféroidoknak æquatorai a $D^{(2)}$ æquatorával ugyanegy δ síkban vannak és az $e^{(2)}$-nek SS' csúcspontjain mennek keresztül. Az $N^{(2)}$ hiperboloid tehát azzá a δ síkká korcsosul el, a mely az $e^{(2)}$-nek a melléktengelyére a középpontban merőlegesen áll.

A $D_i^{(2)}$ szféroidoknak fokális körei szintén a δ síkban vannak és az $e^{(2)}$-nek fokális hiperboláját, $h^{(2)}$-őt, kizárva burkolják. A $H^{(2)}$ hiperboloid tehát a δ síknak abba a részébe korcsosul el, a mely a $h^{(2)}$ hiperbolán kívül van.

A $D_i^{(2)}$ szféroidok vezérlő hengereinek metszései a δ síkban levő összes æquatorsíkokkal egy $\mathfrak{f}^{(2)}$ ellipsist bezárva burkolnak.

A $G^{(2)}$ hiperboloid tehát a δ síknak ezen $\mathfrak{f}^{(2)}$ ellipsisen kívül fekvő síkrészbe korcsosul el.

Mindezt a 6. pont alatt másféle tárgyalásban már láttuk.

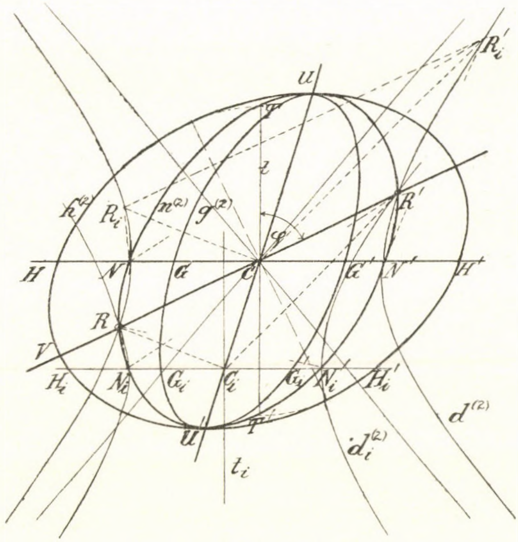
2) *Ha* $\varphi = 90°$, akkor az $N^{(2)}$, $H^{(2)}$ és $G^{(2)}$ hiperboloidok illusoriussá válnak, mert az $e^{(2)}$ ellipszisen nem lehet olyan szféroidokat átfektetni, a melynek forgástengelye merőleges az ellipszis síkjára. Ha azonban az $e^{(2)}$ ellipszis helyett kört veszünk, akkor a három hiperboloid határozatlan lesz. —

12. Vegyünk fel ezután egy $d^{(2)}$ hiperbolát (6. ábra), melynek középpontja a C, főtengelye NN', melléktengelyén a hatványpontot TT', gyújtópontjai a HH', és vezérlő vonalainak metszőpontjai a főtengelylyel GG'. E hiperbola RR' átmérőjének RR' végpontjain keresztül a $d^{(2)}$-vel hasonló és hasonló fekvésű $d_i^{(2)}$ hiperbolákat vezetünk és felkeressük geometriai helyét $n^{(2)}$-őt, $h^{(2)}$-őt és $g^{(2)}$-őt e hiperbolák N_iN_i' csúcsainak, H_iH_i' gyújtópontjainak és a vezérlő vonalak G_iG_i' metszőpontjainak az illető hiperbolák főtengelyeivel.

E végből a $d^{(2)}$ hiperbolának RR' átmérőjéhez kapcsolt átmérőjén, UU'-ön, fölveszszük a C_i pontot, melyet egy $d_i^{(2)}$ hiperbola középpontjának tekintünk. A C_iR és C_iR' félsugarakkal a C ponton keresztül vezetett párhuzamosak a $d^{(2)}$-őt az R_iR_i' pontokban metszik. Ha az $RR'N_iN_i'$ négyszög hasonló és hasonló fekvésű az $R_iR_i'NN'$ négyszöggel, úgy az N_iN_i' már csúcsa a d_i^{2} hiperbolának. A C_i pont változásával az UU' átmérőn a tőle meghatározott R_iR_i' pontok projektiv pontsorokat írnak le a $d^{(2)}$-ön, és az NR_i, NR_i' sugarak projektiv sorokat írnak le az N körül, és így a velök párhuzamos RN_i, $R'N_i$ sugarak sorának képződménye, mely az N_i pontok geometriai helye, egy $n^{(2)}$ kúpszelet.

Ha a C_i pont az UU' átmérőnek egyik hatványpontjába, pl. az U'-be jut, akkor az RU', $R'U'$ egyenesekkel a C-n keresztül vezetett párhuzamosak a $d^{(2)}$-nek aszimptótái lesznek, tehát az ide tartozó R_iR_i' pontok a $d^{(2)}$ asimptótáinak R_∞, R'_∞ végtelen távol fekvő pontjai. Az $R_\infty N$-nel és az $R'_\infty N$-nel az R, illetve az R' pontokon keresztül vezetett párhuzamosak egymást az U'

pontban metszik, és így az U' és hasonló okoknál fogva az U hatványpont, az $n^{(2)}$ kúpszeleten van. Ha a C_i pontot az UU' vonaldarabon kívül veszszük fel az UU' egyenesen, akkor a C-n keresztül a C_iR és C_iR'-sel párhuzamos egyenesek már nem metszik a $d^{(2)}$ hiperbolát valós pontokban és ezért az UU' vonaldarabon kívül fölvett C_i pont nem lehet középpontja egy $d_i^{(2)}$ hiperbolának.



6. ábra.

Az UU', NN' egy kapcsolt átmérőpárja az $n^{(2)}$ kúpszeletnek, a mely tehát ellipsis. Ugyanigy ellipszisek az $n^{(2)}$-vel az UU' affinitási tengelyre vonatkozólag affin $h^{(2)}$ és $g^{(2)}$ kúpszeletek. A $h^{(2)}$-nek a HH', UU', a $g^{(2)}$-nek pedig a GG', UU' az a kapcsolt átmérőpárja, mely az $n^{(2)}$-vel való affinitásban az NN', UU' kapcsolt átmérőpárnak megfelel.

Az $n^{(2)}$ ellipszis az RR' pontokon megy és az RR'-höz kapcsolt átmérője a TT', mert $NT \parallel RU$.

A $h^{(2)}$ ellipszis a $d^{(2)}$ hiperbolának HH' gyújtópontjain megy keresztül és érintői e pontokban párhuzamosak az UU' egyenessel, valamint a $d^{(2)}$-nek érintőivel az RR' pontokban, tehát egyenlő szögek alatt hajlanak az $RHR'H'$ parallelogrammának oldalaihoz. Ezért az RR' pontok gyújtópontjai a $h^{(2)}$ ellipszisnek. És mert a $h^{(2)}$ és $d^{(2)}$ kölcsönösen egymásnak gyújtópontjain megy keresztül és e pontoknak érintői párhuzamosak, azért a $h^{(2)}$-nek félmelléktengelye egyenlő TC-vel, félfőtengelye

$$VC = \sqrt{\overline{TC}^2 + \overline{RC}^2}.$$

A $h^{(2)}$ és $g^{(2)}$, ugyanazon oknál fogva mint az előbbi esetben, poláris alakzata egymásnak az $n^{(2)}$-re vonatkozólag.

Ha a $d^{(2)}$ hiperbolának NN' főtengelyét $2b$-vel, a TT' melléktengelyén a hatványpontok távolságát $2\mathfrak{a}$-val, az RR' átmérőjét $2a$-val, ezek hajlásszögének pótlószögét φ-vel jelöljük, és ha

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad \mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}^2 + b^2, \quad m_1^2 = a^2\sin^2\varphi - b^2,$$

akkor a $d^{(2)}$ hiperbolának

$$\frac{a^2\sin^2\varphi}{b^2} - \frac{a^2\cos^2\varphi}{\mathfrak{a}^2} = 1$$

egyenletéből

$$\mathfrak{a} = \frac{ab\cos\varphi}{m_1}, \quad m_1 = b\cdot\frac{c}{\mathfrak{c}}, \quad \cos\varphi = \frac{\mathfrak{a}}{a}\cdot\frac{c}{\mathfrak{c}},$$

végre bármelyik $d_i^{(2)}$ hiperbola pontjainak távolságai a saját gyújtópontjától és az ahhoz tartozó vezérlő vonaltól oly viszonyban vannak, mint $c : m_1$ vagy a véle egyenlő $\mathfrak{c} : b$.

A találtakból csak a következőket foglaljuk e tételbe:

Ha valamely síkban egy hiperbolát és oly két pontot veszünk fel, a melyeknek összekötő egyenese a hiperbolát valós pontokban metsző átmérővel párhuzamos, akkor a két ponton keresztül menő és a felvett hiperbolával hasonló és hasonló fekvésű hiperboláknak gyújtópontjai egy ellipszisen vannak. Ennek az ellipszisnek a felvett két pont a gyújtópontja, melléktengelyének negativ négyzete pedig akkora mint ama hasonló hiperbolák legkisebbikének melléktengelyének négyzete.

Klug Lipót.

A FÖLDMÁGNESES ERŐ NAPI VÁLTOZÁSA.

Ismeretes dolog, hogy a földmágneses erő az időben változik és e változások különböző periodusokhoz kötöttek. A földmágneses erőnek van napi, évi és szekuláris változása. Az utóbbinak periodusa igen hosszú, évszázadokra terjedő, biztos ismeretünk róla a korábbi évszázadokban hiányos észlelések folytán eddig nincs. Más periodusok, melyek pl. a holdmozgással vagy a Napnak tengelye körül való forgásával és a felületén végbemenő változásokkal vannak összefüggésben, többé-kevésbbé még problematikusak, kivéve a napfoltok 11 évi periodusát, mely a deklináczióváltozás napi amplitudójában tükröződik vissza. Az alábbiakban a földmágneses erőnek napi változásáról szólunk és az elmondandókban az utolsó 15 évben történt ily irányú vizsgálatokra támaszkodunk.

A napi változást a mai észlelési módoknak megfelelőleg következőkép számítjuk ki. A nap egyes egész óráira vagy rövidebb időközökre, regisztráló műszerek esetén folytonosan ismerjük az úgynevezett elemeknek: a deklináczionak (D), horizontális intenzitásnak (H), inklináczionak (I) vagy a vertikális intenzitásnak (Z) értékét; ha ezekből számtani közepet képezünk, úgy megkapjuk az illető elemnek arra a napra vonatkozó napi középértékét. Az egyes észlelési időpontok adatainak eltérése a középtől adja a napi menetet. Eltekintünk most háborgásos napoktól, melyek külön vizsgálat tárgyát képezik. Ha most különböző hónapokról képezzük az elemek középértékeit az egyes órákra, az ezekből kiadódó menet a háborgásos napok kizárásával vagy figyelembe vételével képezi az anyagot, melyre a további vizsgálatok vonatkoznak. A vizsgálatot azonban czélszerűbben nem a műszerektől direkt szolgáltatott elemekre, tehát a deklináczióra és horizontális intenzitásra végezzük, hanem az ezekből kiszámitott, a napi változást okozó erőnek derékszögű komponenseire, melyek következő egyenletekkel advák:

$$X=H\cos D,\quad Y=H\sin D,\quad Z=H\operatorname{tg} I,$$

hol oly koordináta rendszert hoztunk be, melynek középpontja az észlelő helyen van, és a positiv x tengely a csillagászati észak felé, az y tengely kelet felé és a z tengely vertikális irányban lefelé néz; D északról kelet felé positivnak számittatik.

A napi menet kiszámítására vonatkozó megállapodás szerint a földmágneses erő derékszögű komponensei valamely pillanatban, Bezold jeleléseit használva, következő alakban irhatók:

$$\left.\begin{aligned}X &= X_c + X_d + X_s\\ Y &= Y_c + Y_d + Y_s\\ Z &= Z_c + Z_d + Z_s\end{aligned}\right\}$$

hol a c indexű komponensek a napi középértékek, tehát állandók és csak az évi és szekuláris változásnak vannak alávetve, $X_d Y_d Z_d$ a napi menetet okozó erőösszetevők, $X_s Y_s Z_s$ a háborgási erőösszetevők. Gyakran a következő czélszerű jelelést szokták használni. Az $X_d Y_d Z_d$ vagy a vizsgálat czéljának megfelelőleg az X_d+X_s stb. erő összetevőket $\varDelta X$, $\varDelta Y$, $\varDelta Z$-vel szoktuk jelelni, mint azon erő összetevőit, a mely az állandó napi középértékre szuperponálódik. Ezen erőösszetevők a közönségesen használt meghatározó adatokból következőkép adódnak:

$$\varDelta X = \varDelta H\cos D - H\sin D\varDelta D$$
$$\varDelta Y = \varDelta H\sin D + H\cos D\varDelta D$$
$$\varDelta Z = \varDelta H\operatorname{tg} I + \frac{H}{\cos^2 I}\varDelta I = \frac{Z}{H}\varDelta H + \frac{H}{\cos^2 I}\varDelta I.$$

A földmágneses erő napi változására vonatkozó vizsgálatoknak A. Schusternek 1889-ben megjelent értekezése adott új irányt.* Az ő alapgondolatát tovább fejlesztette és vizsgálati módszerrel gyarapította W. v. Bezold.**

* Phil. Transact. of the Royal Society of London. Vol. 180 (A), p. 467. 1889.

** Z. Theorie der Erdmagn. Sitzungsber. d. kgl. preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin. 1897. p. 425.

Az előbbi kutató azon tényre támaszkodva, hogy a földmágneses erő csillagászati koordinaták szerint vett összetevőinek napi menete egy ugyanazon parallel kör mentén főbb vonásokban ugyanaz, abból a föltevésből indul ki, hogy Földünk egy, 24 órán belül önmagában változatlan mágneses mezőben forog tengelye körül és ezen mágneses tér erővonalai tükröződnek vissza a napi menetben. Ez az első feltevése. A második feltevés az, hogy ezen mágneses mezőt előidéző erőknek van potencziálfüggvényük. Különösen hangsúlyoznunk kell, hogy e két feltevés egymástól teljesen független és az észlelési adatoknak kellő irányban és módon való feldolgozása van hivatva eldönteni azt, hogy mily közelitéssel áll fenn a két felvétel.

Ha SCHUSTER második feltevése értelmében van ezen erőknek potencziál függvényük és ezt V_d-vel jeleljük, úgy irhatjuk:

$$X_d = \frac{1}{R}\frac{\partial V_d}{\partial \varphi}, \quad Y_d = \frac{1}{R}\frac{\partial V_d}{\cos\varphi d\lambda}, \quad Z_d = \frac{\partial V_d}{\partial r}, \quad r = R$$

hol R a Föld sugara, φ, λ az észlelő hely sarkmagassága és geografiai hosszúsága. Az első két kifejezés a földmágneses napi változást előidéző erőnek a horizontális síkba eső komponensei és miként látni fogjuk, V_d meghatározására elegendők; a Z_d annak eldöntésére fog szolgálni, vajjon külső (a Földön kivül fekvő) vagy belső okok idézik-e elő a szabályos napi menetet.

BEZOLD eszmemenetét követve, irhatjuk az első egyenletből

$$V_d = R\int X_d d\varphi + C.$$

V_d a Föld polusain egyenlő 0-al, mert hisz SCHUSTER első feltevése értelmében a napi változást előidéző mágneses mező önmagában nem változva, 24 óra alatt egyszer megfordul a Föld tengelye körül, tehát V_d a poluson nem lehet változó; de véges állandó sem lehet, mert akkor azon erők potencziál függvényéhez volna számitandó, mely a földmágneses erő állandó részét okozza, tehát a mostani tárgyalásunkból kizárandó. V_d tehát csak 0 lehet a polusokon, azaz:

$$0 = R\left(\int X_a d\varphi\right)_{\frac{\pi}{2}} + C = R\left(\int X_a d\varphi\right)_{-\frac{\pi}{2}} + C,$$

tehát

$$\frac{V_d}{R} = \int^{\varphi} X_d d\varphi - \int^{\frac{\pi}{2}} X_d d\varphi = \int^{\varphi} X_d d\varphi - \int^{-\frac{\pi}{2}} X_d d\varphi$$

$$\frac{V_d}{R} = -\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} X_d d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\varphi} X_d d\varphi.$$

Ha tehát ismeretes X_d a Föld összes pontjain, akkor a V_d minden helyre meghatározható, tehát az Y_d összetevők is. Analog megfontolásokkal, kissé hosszadalmasabban, a második egyenletből ki lehet mutatni, hogy az Y_d összetevők ismerete is a V_d-t meghatározza, tehát az X_d-ket is. Megjegyezzük, hogy az X_d és Y_d nem független egymástól, hanem közöttük a következő összefüggés áll fenn:

$$\frac{\partial X_d}{\partial \lambda} = \frac{\partial (Y_d \cos\varphi)}{\partial \varphi} = \cos\varphi \frac{\partial Y_d}{\partial \varphi} - Y_d \sin\varphi,$$

a mely igen alkalmas egyenlet annak ellenőrzésére, hogy valóban létezik-e a V_d potencziál függvény és mily közelitéssel.

Schuster vizsgálataiban a következő gondolatmenetet követi: Miután tudjuk, hogy az Y_d összetevőkből integrálás útján a V_d meghatározhatók, Schuster az Y_d-t négy különböző parallel körben fekvő állomás számára a következő sorban állította elő:

$$p_1 \cos t + q_1 \sin t + p_2 \cos 2t + q_2 \sin 2t + \cdots + p_n \cos nt + q_n \sin nt,$$

hol t a folyó idő és periodusa 24 óra. A p_1 q_1 . . . koëfficiensek ugyanazon parallel körre állandók. Az állomások voltak Bombay, Lissabon, Greenwich és Szentpétervár, és az ily módon Fourier sorban kifejtett napi menet az 1870. évre vonatkozik. Symmetrikusoknak tételezve fel a potencziál értékeket az æquatorra nézve oly értelemben, hogy az északi félgömbön a nyári félévben ugyanazok a viszonyok, mint a déli félgömbön a nyári félévben és ugyanilyen szuppozicziót téve a téli félévre, e feltevéssel az északi félgömb nyári félévjére a Földnek 8 különböző parallelkörére ki-számította a p_1 q_1 . . . koëfficienseket. Ezekből grafikai interpolálással vagy sorbafejtéssel a közbeeső sarkmagasságokra nyerte e koëfficienseket. Az északi (X_d) komponenseket is felhasználva, ezen koëfficienseknek a sarkmagassággal való változását vagy más szóval, a grafikai interpoláczióhoz felrajzolandó görbe tangenseinek irányát is meghatározhatta. Ha ugyanis

$$X_d = \alpha_1 \cos t + \beta_1 \sin t + \cdots + \alpha_n \cos nt + \beta_n \sin nt,$$
$$Y_d = a_1 \cos t + b_1 \sin t + \cdots + a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

ezek között a

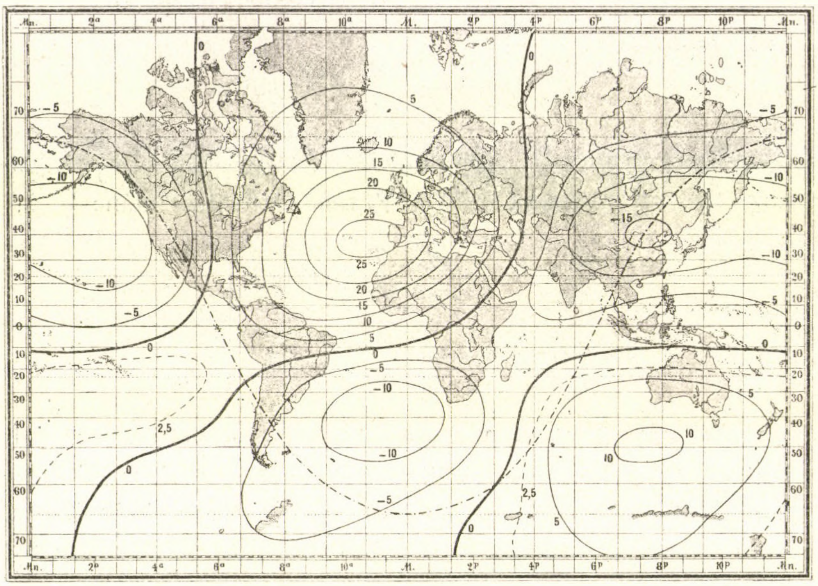
$$\frac{\partial X_d}{\partial \lambda} = \cos\varphi \frac{\partial Y_d}{\partial \varphi} - Y_d \sin\varphi$$

összefüggés áll fenn. Ha még tekintetbe veszszük, hogy $\lambda = \frac{2\pi}{T}(t - t_0)$, tehát $\frac{dt}{d\lambda} = \frac{T}{2\pi}$, nyerjük az X_d, Y_d behelyettesítése után:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da_n}{d\varphi} &= \frac{n\beta_n}{\cos\varphi}\frac{T}{2\pi} + a_n \operatorname{tg}\varphi \\ \frac{db_n}{d\varphi} &= -\frac{n\alpha_n}{\cos\varphi}\frac{T}{2\pi} + b_n \operatorname{tg}\varphi \end{aligned}\right\},$$

tehát nyerjük az Y_d koëfficienseinek a sarkmagassággal való változását. Az erőkomponensek ily módon való numerikus kifejtéséből a potencziál értékeket a Föld összes pontjaira kiszámíthatta. Ezen niveaugörbéket BEZOLD térképbe rajzolta és az eredményt az 1. ábra tárja elénk.

A rajz az északi félgömb nyári félévére, a greenwichi délre vonatkozik, a görbékhez írt számok $\frac{V_d}{R}$ értékei 10^{-5} C. G. S. egységekben. A —.—. vonal a Föld azon helyeit, hol nappal van, elválasztja azoktól, a hol éjszaka van. A rajz az északi félgömb nyári évszakára vonatkozik; télen azon szuppoziczió alapján, melylyel a rajz adatai kiszámíttattak, az északi és déli félgömb niveaugörbéi helyet cserélnek. Hangsúlyoznunk kell azonban, hogy a rajz tulajdonkép csak 1870-re vonatkozik, a mely év adataiból számíttatott. Kétségtelen, hogy ha évről-évre szerkesztenénk meg hasonló rajzot, akkor ki kellene tünnie, hogy mily befolyása van ezen görbék alakjára, pl. a napfoltok gyakoriságának és a szekuláris változásoknak. A pozitiv számok ugyanoly jelű potencziált jelentenek, mint az északi félgömb állandó mágnességének potencziálja, tehát ezen pozitiv előjelű görbék oly jelű polust zárnak be, mint a Föld konstans mágnesezettségének ú. n. északi mágneses polusa. A negativ előjelű görbék a Föld konstans mágnességének déli féltekén levő mágneses polusával egyező jelű polust

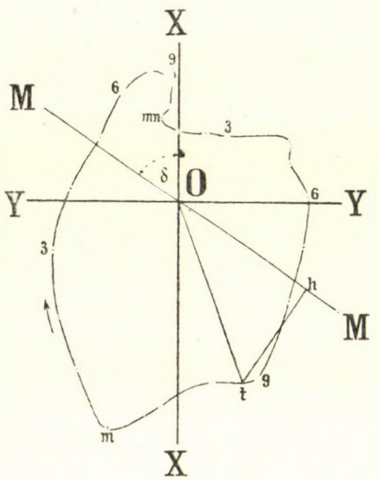


1. ábra.

zárnak be. Nagyon feltünő jelenség e rajzban a nyári és téli évszak különböző volta, továbbá a Föld nappali és éjjeli felének ellenkező volta. Mindkét félgömbön a nappali oldalon egy, az illető félgömb mágneses polusával egyező jelű polust találunk és ellenkező jelűt az éjjeli oldalon. Második nevezetes jelenség, hogy az összes szekunder polusok körülbelül a 40° szélességi kör mentén vannak elhelyezve, tehát azon szélességi körön, mely a választ képezi a passzát szelek és a pólusokat körülzáró cyklonális szélrendszerek között. Hasonló feltünő jelenséget, mely az általános légmozgás és a földmágneses erő némely jelensége között — egyelőre ugyan egész homályos — összefüggést enged sejtetni, BAUER is talált, midőn a földmágneses erő niveaugörbéit egy egyenletesen mágnesezett gömb niveaugörbéivel hasonlította össze. Ez utóbbi vizsgálatokról volt már szó e lapokban (IX. köt. 290. l.)

A napi változást okozó erők niveaugörbéit sikerült tehát SCHUSTER két szuppozicziója alapján megszerkeszteni. Hátra van annak eldöntése, hogy az okok, melyek ily niveaugörbéket adnak, külsők-e, tehát a Föld felületén kivül fekvők vagy belsők-e? Ha galvánáramok alakjában képzeljük a hatókat, úgy e rajz segélyével a következő igen egyszerű, BEZOLDtól használt megfontolás alapján a vertikális erőkomponens figyelembe vételével dönthetjük el e kérdést. Nézzük az északi félgömbön levő és a Föld nappali oldalán fekvő polust. Mivel ez egyenlő jelű a Föld északi mágneses polusával, tehát a mágnestű északi polusát vonzza, — az Ampère-féle szabály alapján vagy egy, az óramutató járásával egyező irányú áramrendszerrel helyettesíthető a Föld felületén (vagy annak belsejében) — vagy pedig az óramutató járásával ellenkező irányú áramrendszerrel a Föld felületén kivül a légkörben. Ámde a tapasztalás szerint ezen szekunder polus átvonulásakor, tehát dél körül, a vertikális komponens kisebbedik, a teljesen szabadon mozgó mágnestű északi polusa felfelé mozog, tehát vagy egy északi polus van alatta vagy egy déli felette; ez pedig az előbb behozott áramrendszerek másodikával egyeztethető csak össze, vagyis a Föld felületén kivül eső áramkörrel. Ha tehát galvánáramokkal akarjuk magyarázni a napi változást, akkor azok a Föld felületén kivül, a légkörben keresendők.

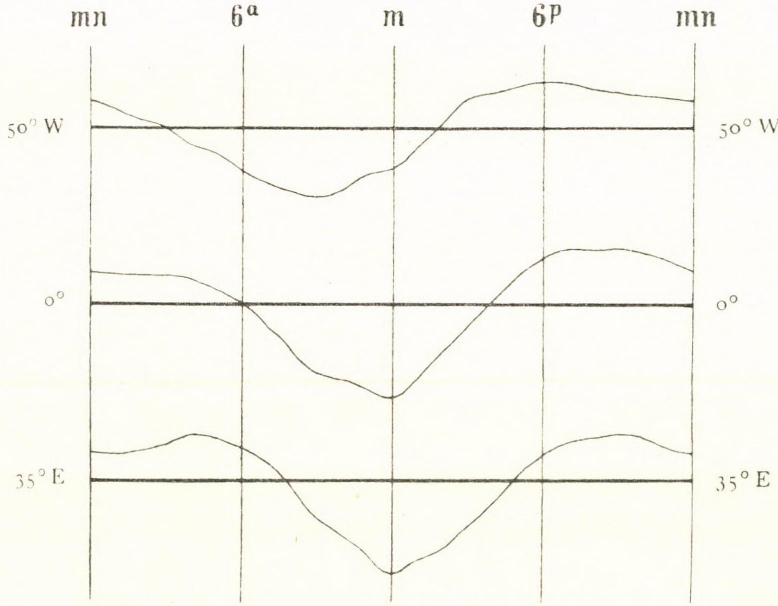
A mit SCHUSTER és BEZOLD vizsgálatai nyomán az előzőkben elmondtunk, tulajdonképen első ily irányú, de messze kiható lépés a földmágneses erő napi változásának vizsgálatában. Messze kiható többek között annyiban, hogy az észlelési adatoknak feldolgozási irányára és módjára fontos útmutatásokkal szolgál. Az előzőkben mindig az *XYZ* erőösszetevőkkel foglalkoztunk és nem a közönségesen használt *H*, *D*, *I* adatokkal. A napi változásokra jellemző szabályosságok nagyrésze ezen erő összetevők vizsgálatánál jobban domborodik ki, mintha H, D, I változásait vizsgáljuk. És épen e ténynek figyelmen kivül hagyása vagy fel nem ismerése az oka annak, hogy a régebben már, a mult század 40-es és 50-es éveiben, Airytől szerkesztett úgynevezett vektordiagrammok nem vezettek a napi változásnak azon felfogására, melylyel Schuster értekezésében találkozunk. Vektordiagrammnak a következő rajzot nevezzük. Ha kiszámítjuk az $X_d Y_d$ erőösszetevőket a nap egyes óráira és ezeket egy derékszögű koordináta rendszerbe felrajzoljuk, akkor mindegyik pár összetartozó (ugyanazon időpontra vonatkozó) érték egy pontot határoz meg a síkban. Ha ezen pontokat összekötjük egymással, kapunk egy sokszöget, folytonosan regisztrált adatok felrajzolása esetén egy zárt görbét és ez a vektordiagramm. Természetes, hogy $Y_d Z_d$ és $Z_d X_d$ összetevők is adnak egy-egy vektordiagrammot. Airy az $X_d Y_d$ összetevőket nem a csillagászati meridiánra, hanem a mágneses meridiánra vonatkoztatta és ez volt az oka annak, hogy a napi változás törvényét, mely most foglalkoztat bennünket, nem ismerte fel. Az $X_d Y_d$ ily módon felrajzolt vektordiagrammnak nevezetes sajátsága van. Ha t. i. a napi változást valóban Földünknek egy nap folyamán változatlan mágneses erőtérben való forgása hozza létre, akkor ennek a vektordiagrammnak ugyanazon parallel kör mentén fekvő helyekre ugyanolyan alakunak kell lennie, a mi sem H, sem D görbében való ábrázolásában nem fog bekövetkezni. Nyilvánvalóvá teszi ezt a 2. és 3. ábra, melyek elseje egy vektordiagrammot ábrázol, második pedig ugyanezen vektordiagrammból vett horizontális intenzitás napi menetét 3 oly helyre, hol a deklináczió 50° nyugatra, 0° és 35° keleti. A horizontális inten-



2. ábra.

zitás értékét a vektordiagrammból úgy kapjuk, hogy a vektordiagrammnak az egyes időpontokhoz tartozó radius vektorait a mágneses meridiánra projicziáljuk. Ez utóbbinak iránya különböző lévén az egyes helyekre, e projekcziók napi menete is különböző.

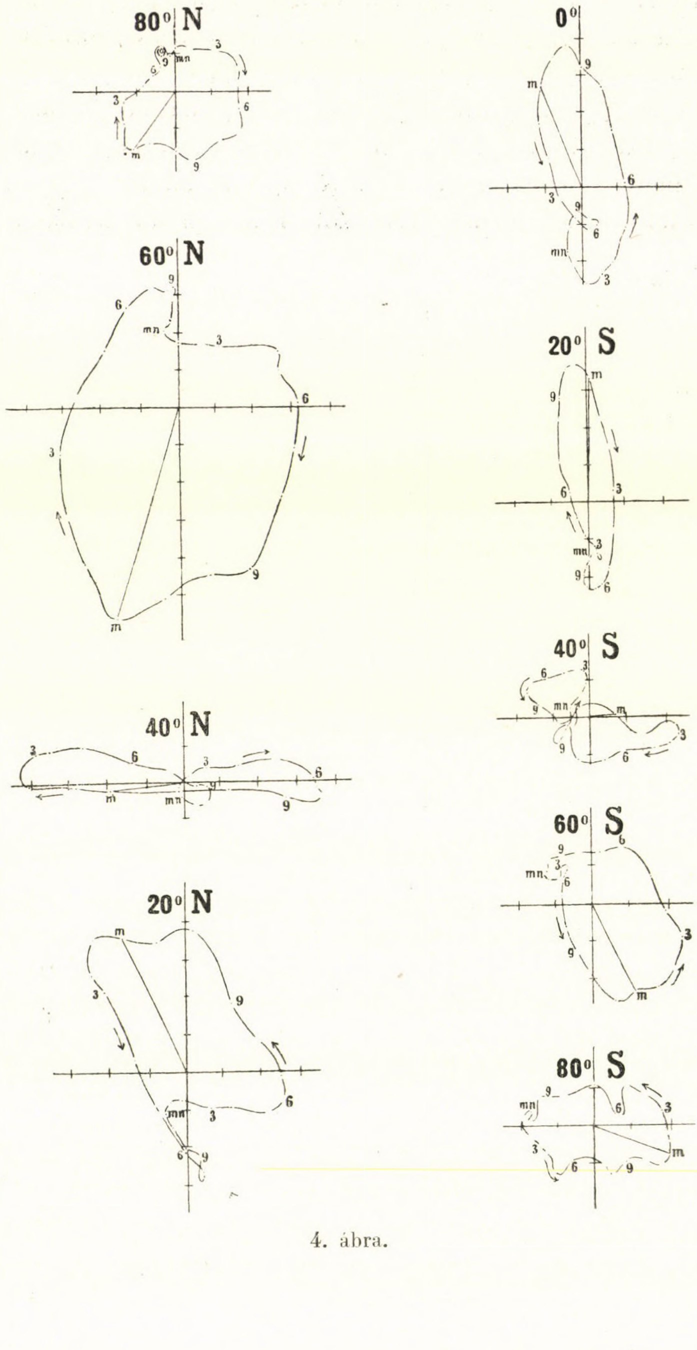
A vektordiagrammnak említett tulajdonsága, hogy ugyanazon parallelkör mentén fekvő helyekre ugyanolyan alakú, SCHUSTER első feltevésének ellenőrzésére szolgál A napi változásnak a geo-



3. ábra.

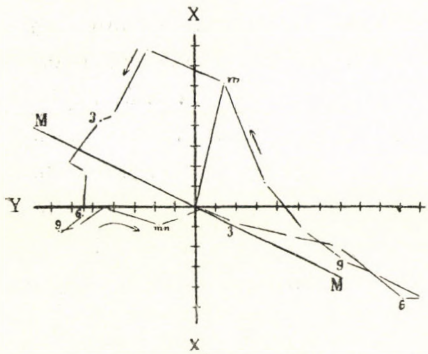
grafiai szélességtől való függése a 4. ábrából válik világossá, melyet szintén v. BEZOLD értekezéséből vettünk.

Az eddig tárgyalt és ezután tárgyalandó vektordiagrammok csupán a horizontális síkra vonatkoznak. A vektordiagrammok fizikai jelentését következőkép fogalmazhatjuk. Ha Földünk állandó mágnességét, melyre a napi változás szuperponálódik, valamikép kompenzálnók, akkor a horizontális síkban mozgó mágnestű egy nap folyama alatt a vektordiagramm sugarainak irányában helyezkednék el, a ráható erő e sugár hosszával arányos és a tű

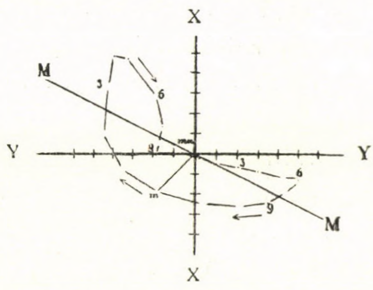


4. ábra.

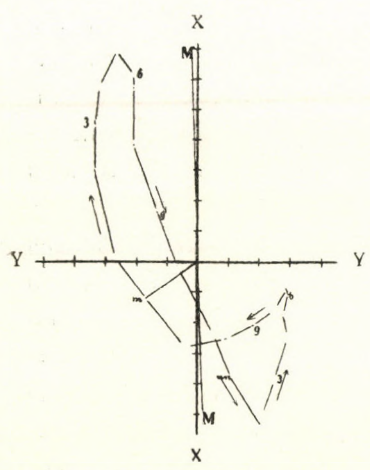
északi vége oly irányban mozogna, mint a 4. ábrában a nyilak mutatják. E rajzból látni való, hogy az északi félgömbön magasabb szélességű helyeken e forgás iránya az óramutató járásá-



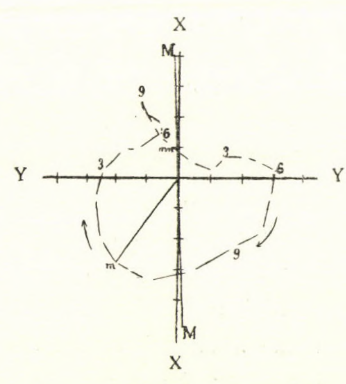
Godthaab. Összes napok.



Godthaab. Normál napok.



Sodankylä. Összes napok.



Sodankylä. Normál napok.

5. ábra.

val egyező, a 40° szélességi kör alatt hurkot képez és alacsonyabb szélességű helyen az óramutató járásával ellenkező. Ez az irány megmarad az æquatoron is; átlépve az egyenlítőt, a forgásirány megváltozik és 40° déli szélesség alatt ily hurokalakon keresztülmenve, melynek egyik felében máris az óramutató járásával ellenkező a mozgásirány, a magasabb déli szélességek alatt ez utóbbi irány marad meg.

A vektordiagrammok szerkesztése tehát igen fontos segédeszköz a napi változás vizsgálatában, a mint az előzőkből kiviláglik. És ha minél több helyről megszerkeszthetnők a vektordiagrammot, úgy a napi változás törvényeiről könnyen áttekinthető képet nyernénk. E tekintetben nagyon fontosak azok az egy éven át folytatott szimultán megfigyelések, a melyeket az úgynevezett poláris évben, 1882 szeptembertől 1883 szeptemberig internáczionális együttműködéssel poláris vidékeken végeztek. Az itt nyert adatok roppant becsesek, nagyrészük azonban még koránt sincs feldolgozva. Összesen 10 poláris állomás volt működésben, a legmagasabb Cap Thordsen 78°28'4 északi szélesség alatt (a Spitzbergákon). E poláris év észlelési adataiból eddig levezetett eredmények egy részét a következőkben bemutatjuk.

A poláris állomásokon a napi változás vizsgálata egy oly nehézségbe ütközik, mely az alacsonyabb szélességek alatt csekély mérvben érvényesül. A polushoz közelebb eső állomásokon ugyanis (részben gyakori északi fény következtében) nagyon gyakran intensiv mágneses háborgások lépnek fel, melyek a mi vizsgálatunknál kiküszöbölendők. Az úgynevezett nyugodt napok elkülönítése a háborgásos napoktól sokszor igen fáradságos munka, melynél bizonyos önkény alig kerülhető el. Mostanában általánosságban és különösen az 1882/83. poláris évre vonatkozólag Wildtől először ajánlott azon eljárás szokott használtatni, hogy oly napok tekintetnek nyugodt napoknak, és az adataikból levezetett napi menet *normális* napi menetnek, melyeken a variáczió készülékek fotografiai úton regisztrált adataiból származó görbe nem mutat nagyobb, szabálytalan és hirtelen ugrásokat. Egyes órákban fenmaradó, különösebben eltérő értékek interpolált értékekkel helyettesíttetnek. Poláris állomáson az egyes hónapokban csak néhány ily nyugodt nap lesz található.

A horizontális síkban ható erő vektordiagrammjának vizsgálata poláris állomásokon igen meglepő eredményre vezetett. Ha ugyanis a vektordiagrammot csakis a nyugodt napok adataiból rajzoljuk meg, Lüdeling szerint* úgy találjuk, hogy a poláris állomásokon a mágnestű északi végének forgási iránya az óramutató járásával egyezik, tehát épen olyan, mint azt Schuster számításaiból Bezold megrajzolta. Ha azonban a napi menetet a hó összes napjaiból számitjuk, tehát a háborgásos napokat is beleveszszük, akkor e forgásirány ellenkezővé válik. Az 5. ábrán, melyet Lüdeling értekezéséből vettünk át, Godthaab (Grönland nyugati partján: $\varphi = 64^\circ 10.'8$ és $\lambda = 51^\circ 41.'5$ W) és Sodankylä (a Lappföldön: $\varphi = 67^\circ 54.'5$ és $\lambda = 26^\circ 36.'1$ E) állomások vektordiagrammjait mutatjuk be, még pedig junius és julius hónapokról egyesítve. A felső két ábra Godthaabra az alsó kettő Sodankylä-re vonatkozik. Látnivaló a forgásirányoknek ellenkező volta a normális és az összes napokon, továbbá felismerjük a hasonlóságot normál napok vektordiagrammjában, nevezetesen a radius vektor 10 és $11\frac{1}{2}$ óra közt d. e. megy át a csillagászati meridiánon egyszer és körülbelül 12 óra mulva másodszor az ellenkező irányban.

Ha a normál menet ily lényeges vonásokban eltér az összes napokból számított menettől, melyekben a háborgásos napok is benn vannak, önként felmerül a kérdés, nem mutatnak-e az utóbbiak szintén bizonyos szabályszerűséget. Ennek megvizsgálása aránylag nagyon egyszerű. Mert ha

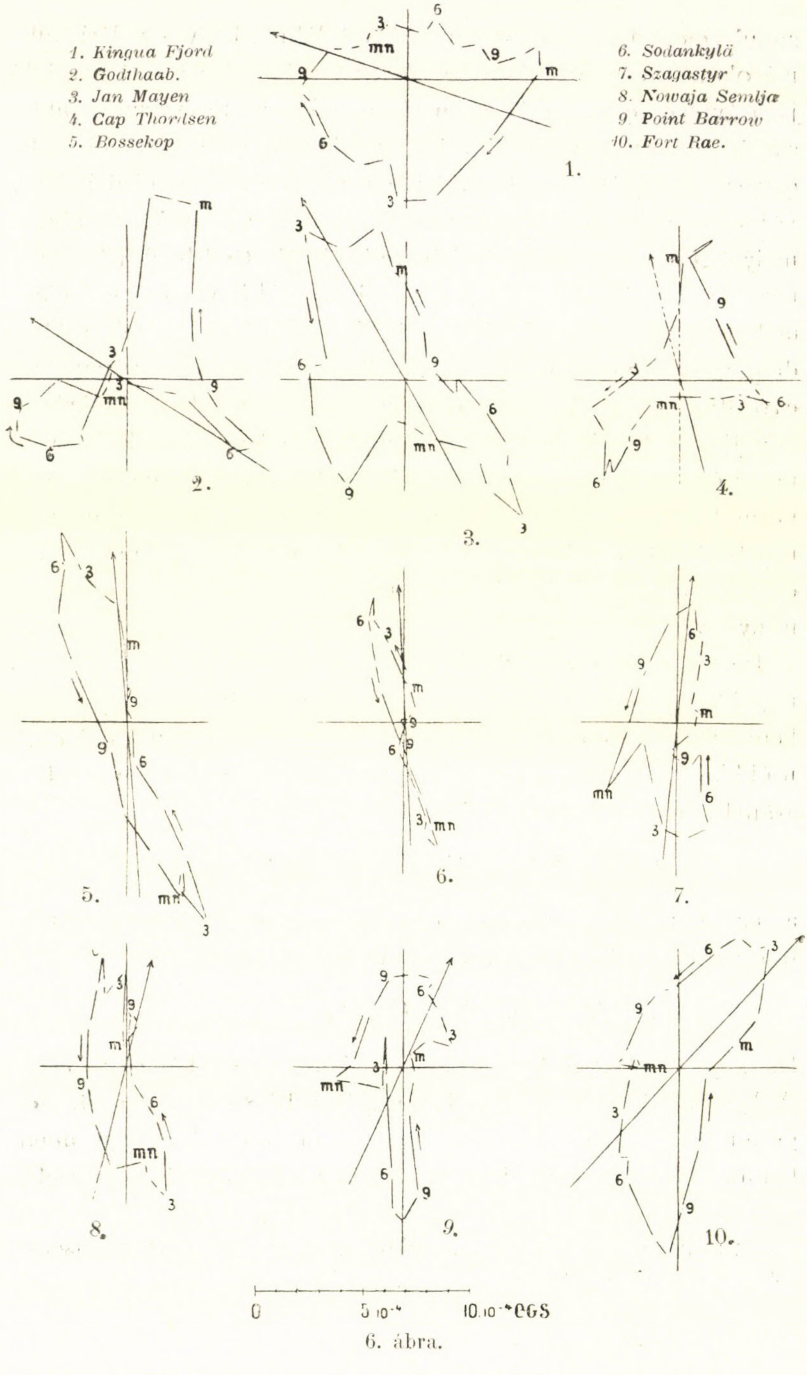
$$\Delta X = X_d + X_s, \quad \Delta Y = Y_d + Y_s, \quad \Delta Z = Z_d + Z_s$$

az összes napokból számított napi menet erő összetevői, úgy tisztán a háborgást okozó erő összetevők

$$X_s = \Delta X - X_d, \quad Y_s = \Delta Y - Y_d, \quad Z_s = \Delta Z - Z_d.$$

Ha a jobb oldalon levő különbségeket tényleg képezzük és az $X_s Y_s Z_s$ értékeket felrajzoljuk, nyerjük a háborgás erő vektordiagrammjait. A horizontális síkban ható erőre e vektordiagrammokat junius, julius hónapokra, Lüdeling szerint, a 6. ábra ábrázolja.

* Üb. die tägliche Periode d. Erdmagn. etc. Terrestrial Magnetism., 1899 Dezember, p. 245.

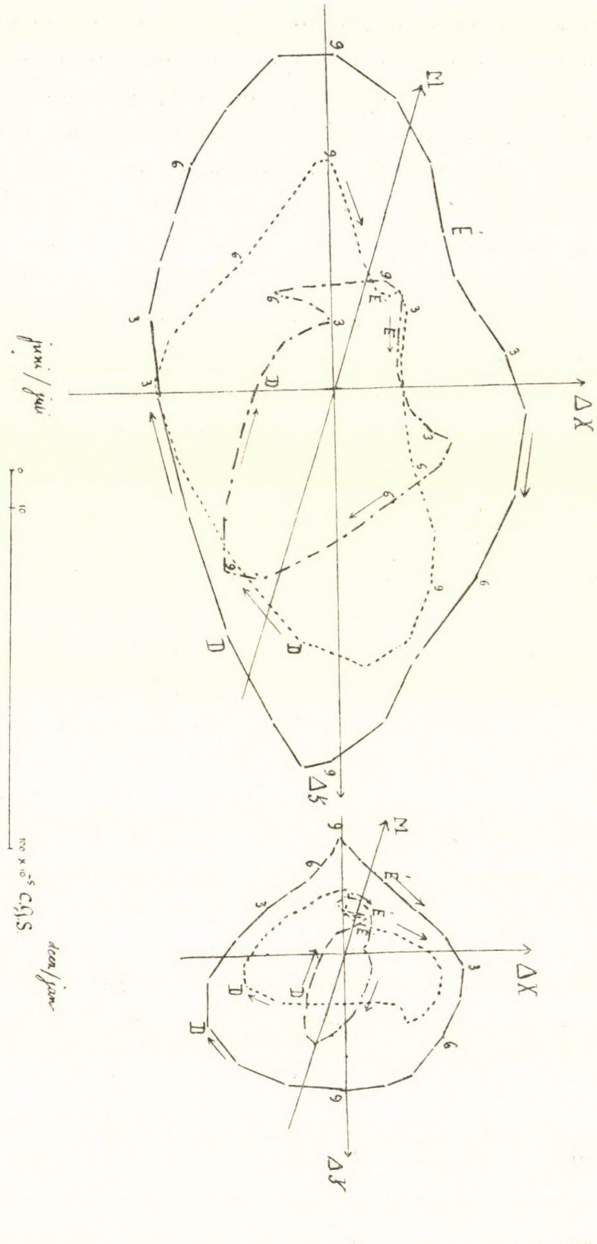

1. Kingua Fjord
2. Godthaab.
3. Jan Mayen
4. Cap Thordsen
5. Bossekop
6. Sodankylä
7. Szagastyr
8. Nowaja Semlja
9. Point Barrow
10. Fort Rae.
1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
0
5.10⁻⁴
10.10⁻⁴ CGS

6. ábra.

Feltünő, hogy valamennyi állomáson, Kingua Fjordot kivéve, a háborgás erő vektordiagrammjában a radius vektor mozgása az óramutató járásával ellenkező. Más jellemző tulajdonsága e diagrammoknak az, hogy a radius vektor ép úgy, mint a normális menetnél, kétszer megy át a csillagászati meridiánon, bár az egyes helyeken különböző időben. A két átmeneti idő különbsége 12 óra. Feltünő jelenség, hogy e vektordiagrammok alakja összefüggésben van a meridián irányával. A legtöbb diagramm a mágneses meridián irányában elnyult és erre symmetrikus. A legfeltünőbb és legjellemzőbb különbség a normális menet és a háborgások vektordiagrammja közt az, hogy a radius vektor az előbbit az óramutató járásával egyező irányban futja be, az utóbbit az ellenkező irányban. Ebből már következik, hogy a normális napi menet és a háborgások különböző okra vezetendők vissza. Ez azonban, mint LÜDELING kiemeli, nem zárja ki azt, hogy végelemzésben «mindkettő a Nap sugárzására vezetendő vissza, a mi abból a körülményből következik, hogy nemcsak a háborgások gyakorisága a napfoltok számával nő és fogy, hanem a normális napi menet amplitudója, tehát a háborgásoktól mentes vektordiagramm nagysága is», mint azt AIRY korábbi vizsgálatai bizonyitják.

A poláris állomások vektordiagrammjaiban talált általános szabályszerűségek és törvények alól sajátságos kivételt csak ezen állomások egyike: Kingua Fjord ($\varphi=66°35,7$ és $\lambda=67°19,3$ W) É.-Amerikában, a Cumberland-öbölben (Baffin-föld) képez. Nevezetesen akár az összes napokból, akár a nyugodt napokból képezzük a vektordiagrammokat, aránylag szabályos görbét kapunk, melyet a radius vektor mindig az óramutató járásával egyező irányban fut be. Ugyanez áll a háborgások diagrammjára nézve is, mint ez a 7. ábrából látható.

| az összes napokból képezett vektordiagramm (X_d+X_s, Y_d+Y_s),
¦ normál « « « $X_d Y_d$,
: háborgásos « « « $X_s Y_s$.



7. ábra.

Itt a rajzban csak juni/juli és decz./jan. hónapokra vonatkozó adatokat mutatjuk be. De nagyjában ugyanez a jellemvonása a többi hónapok vektordiagrammjainak is. Kingua Fjord e kivételes magaviseletét Lüdeling azzal magyarázza, hogy itt a háborgások oly erősek, hogy a szabályos normális menetet teljesen elnyomják és a háborgási erő vektordiagrammjának jellegét a normális menet vektordiagrammja is felveszi. E magyarázathoz azonban azt is fel kellene tételezni, hogy maguk a háborgások épen ellenkező irányban hatnak, mint a többi poláris állomásokon, mert hisz itt a háborgás a vektordiagrammjában az óramutató járásával egyező forgást létesit, míg a többi poláris állomásokon az óramutató járásával ellenkezőt. E sajátságos magaviselet magyarázatára némi útmutatással szolgál az a körülmény, hogy épen Kingua Fjord úgy a mágneses polushoz, mint az északi fénypolushoz legközelebb állt az összes poláris állomások között.

A mit így a vektordiagrammok segélyével a napi menet törvényeire nézve megállapitunk, mathematikai formában a következő alakba öltöztethető. A ΔX, ΔY, ΔZ erő összetevők, melyek alatt most a vizsgálat czélja szerint akár $X_d Y_d Z_d$, akár $X_s Y_s Z_s$, akár ezek összegét X_d+X_s, Y_d+Y_s, Z_d+Z_s erő összetevőket értjük, mint minden, egyelőre ugyan ismeretlen, de periodusosan ható okok együttműködéséből keletkező tünemény, következő alakban irhatók: $p_1 \cos t+q_1 \sin t+p_2 \cos 2t+q_2 \sin 2t+\cdots+p_n \cos nt+q_n \sin nt$; t a folyó idő és periodusa 24 óra, p, q koëfficiensek az észlelési adatokból kiszámitandók. Ha e sorbafejtéseket az év minden hónapjára elvégezzük, akkor e koëfficiensek nagyságrendje és az év folyamán állandó vagy változó volta fontos útmutatásokkal szolgálhat arra, hogy hol kell keresnünk az egyes ható okokat, a melyeknek szuperpozicziójából keletkezik a fennebbi, soralakban előállitott napi menet. Ez az alapgondolata azon vizsgálatoknak, melyeket Nippoldt inditott meg.* Analogiája ez azon eljárásnak,

* Több, e tárgyra vonatkozó értekezése közül megemlitjük: «Neue allgem. Erscheinungen in d. täglichen Variation der erdmagnetischen Elemente», Annal. d. Hydr. u. Marit. Meteorologie, 1898 Juli; «Ein Ver-

a melyet a meteorologiában régen használnak (bár e téren gyakran megtámadásnak volt kitéve ezen eljárás) és a mely úton pl. HANN a légnyomás napi oszczillácziójára vonatkozó törvényeket hozta le.

A földmágneses erő napi változására vonatkozó ismertetésünkben csak tapasztalati tényekről, meg vizsgálati módszerekről és irányokról szóltunk, oly megfontolásokról ellenben, melyek a tünemény valódi fizikai okát adnák, nem tettünk említést. Nem is tehettünk azon egyszerű oknál fogva, mert ilyen magyarázattal még eddig nem rendelkezünk. Bár a napi variáczió tüneménye, legalább a deklináczió változására, már közel 300 év óta ismeretes, nagyon messze vagyunk attól az időponttól, mikor a napi változás összes törvényeit fogjuk ismerni és még távolabb attól, midőn e törvények fizikai magyarázatát és hátterét is megadhatnók.

Steiner Lajos.

---

fahren z. harmonischen Analyse erdmagnetischer Beobachtungen nach einheitlichem Plane» u. o. 1899 Februar; «Über die meteor. Natur der Variationen des Erdmagnetismus», Terrestrial Magnetism, 1902 Sept.

A Mathematikai és Physikai Társulat tizenegyedik rendes közgyűlése.

A Választmánynak márczius 20-án kibocsátott meghivója értelmében a Mathematikai és Physikai Társulat XI. rendes közgyűlését folyó évi április 21-én tartotta meg. Az országszerte felmerült forgalmi akadályok lehetetlenné tették ugyan vidéki tagtársaink megjelenését, de azért a gyűlés eléggé látogatott volt. Különösen sajnálatos volt, hogy ugyanezen okból Károly Irén alelnök érdekes előadása, «a kalium-chlorid elektromos transparentiája» is elmaradt. A kitett íven tagtársaink következő névsorát találjuk:

Balog Mór, Bartoniek Géza, Bauer Mihály, Beke Manó, Bodola Lajos, Bogyó Samu, br. Eötvös Loránd, Feichtinger Győző, Fejér Lipót, Fraunhoffer Lajos, Fröhlich Izidor, Fröhlich Károly, Grúber Nándor, Harsányi Dezső, Hausbrunner Vilmos, Havas Miksa, Hilbert Stefánia, Karlovitz László, Kerekes Dezső (Rimaszombat), Klupathy Jenő, Kopp Lajos, Kőnig Gyula, Kövesligethy Radó, Kövessi Ferencz, Kürschák József, Lakits Ferencz, Mikola Sándor, Oberle Károly, Pekár Dezső, Rados Gusztáv, Rados Ignácz, Rátz László, Riesz Frigyes, Róna Zsigmond, Rucsinszky Lajos, Steiner Lajos, Staub Sándor, Suták József, Szabó Gábor, Szabó Péter, Szirtes Ignácz, Szőke Béla, Szupper Márta, Tötössy Béla, Zemplén Győző.

A közgyűlés napirendje:

1. Elnöki megnyitó.
2. Titkári jelentés.
3. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1904-re.
4. Pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.
5. Választmányi tagok választása.
6. Indítványok.

A KÖZGYŰLÉS.

1. Elnöki megnyitó.

A közgyűlést báró Eötvös Loránd elnök nyitotta meg néhány meleg üdvözlő szóval, melyek kapcsán a fővárosban véletlenül időző egyetlen vidéki tagtársunkhoz, a vasúti forgalom felfüggesztése folytán ezúttal az egész vidék képviselőjéhez is fordul.

A mult közgyűlés jegyzőkönyvének hitelesítése után a jegyzőkönyv hitelesítésére Kerekes Dezső és Havas Miksa tagtárs urakat kéri fel.

2. Titkári jelentés Kövesligethy Radótól.

Tisztelt Közgyűlés!

Társulatunk tizenkettedik évét, melynek tevékenységéről beszámolnom kedves kötelességem, és mint rendesen, most is könnyű feladatom, méltó szép ünnep kezdette, melyen a tudós világ Bolyai szellemének hódolt. Nekünk ez ünnep külső lezárója annak a jubiláris évnek, melyet Bolyai emlékének szentelt munkálkodással töltöttünk, s melyről ezért már egy évvel ezelőtt is kellett szólanom. Mi is elvittük koszorúnkat 1903 januárius 15-ikén az ünneplő Kolozsvárra és az ünnepről elhoztuk azt a most is égő, termékenyítő lelkesedést, mely Bolyai-füzetünket mindig újabb és újabb értékes kutatásokkal gyarapítja s mely már ifjuságunk szívébe is hatolt.

De nincs okom, hogy fényes ünnep leirásával eltereljem figyelmüket Társulatunk belső életének vázolásától.

A mult évben is, mint rendesen minden esztendőben, 10 rendes ülésen jöttünk össze, melyek iránt tisztelt tagtársaink elismerést érdemlő érdeklődéssel viseltettek. Ez üléseken 6 előadó 8 mathematikai tárgyat, 13 előadó 15 physikai tárgyat mutatott be. A physikai tárgyak nagyobb számát azon kivételes körülmény magyarázza, hogy a közgyűlésen ezúttal nem kevesebb, mint hat ilyen irányú előadás, illetve bemutatás volt.

A Mathematikai és Physikai Lapok XII. évfolyama $25^1{}_2$ ív terjedelemben jelent meg. Az önálló és ismertető czikkek rovatában 10 mathematikai tárgy 8 iró, 11 physikai tárgy 9 szerző tollából került ki. A többi megszokott rovat sem hiányzik.

Engedjék meg, hogy a puszta számstatisztikán túl kissé e czikkek tartalmával is foglalkozzam. Hat értekezés egészen Bolyai emlékének, vagy a Bolyai-féle geometriának van szentelve. Néhány különböző szerzőtől való értekezés és előadás mechanikai elvekkel foglalkozik, és ezek egyikéből a mathematikának egy ága is fog hasznot húzni. Ez elvek körül teljes megállapodásról talán nem szólhatunk még, de mindenesetre igaz, hogy Társulatunknak ezek tisztázásában része van. Nem kevésbé fontosak a társulati év lefolyásában hallott kisérleti előadások, a melyek kétségtelenül szintén hozzá fognak járulni ahhoz, hogy folyóiratunk a külföld irodalmában is idézett forrás lesz. Ez előadások némelyike úgy igérkezik, hogy a gyakorlatot is fogja szolgálni. Az elmondottak, úgy remélem, eléggé mutatják, hogy Társulatunk nem pusztán tudományismertető intézmény, hanem alkotásra is termett testület.

Azt hiszem, nem vétek a titkárt kötelező tárgyilagosság ellen, ha a teljes általánosságban megemlített czikkek közül egyet névleg is felhozok. Azt a könyvismertetést értem, mely első őszi füzetünkben napvilágot látott s mely *König* Gyula «Az algebrai mennyiségek általános elméletének alapvonalai» czímű művét tárgyalja. Az évek folyamán, a mint az a nagyszabású munka készült, egy-egy parányi részt előadás alakjában mi is ismertünk meg belőle; de ha nem is kötne hozzá bennünket ez emlék, mégis örömmel említenők alelnökünk művét, a mely a magyar névnek az egész világon dicsőséget szerezett.

A X. mathematikai tanulóverseny 1903 október 10-én tartatott meg. A jelentkezők száma az előző évhez képest ismét hattal apadt — Budapesten és Kolozsvárt összesen 52 középiskolai érettségi bizonyítványt szerzett tanuló vett részt — és az eredmény sem ért fel a mult évivel, ugy hogy az első díj mellőzésével csupán két második díj volt kiadható. Ezeket Haar Alfréd és Kronstein Béla nyerték el.

Választmányi üléseink ez évben is kizárólag a Társulat rendes teendőivel foglalkoztak, de a nyilvánosságot közelebbről érdeklő határozatot nem hoztak.

Tagtársaink száma a társulati év végén 428, előfizetőink száma 91; amaz a mult évhez képest 8-czal emelkedett, emez 19-czel több. A tagok sorában van 18 alapító és 8 hölgy. Az a körülmény, hogy tagjainknak majdnem teljes fele Budapesten lakik, némi reményt nyujt, hogy Társulatunk még terjedésre képes, a mit a tagok létszámának állandósága különben nem engedne remélleni.

Szomorkodva jelentem be Gerevich Emil, Groszbauer József, Hort Henrik, Iszlay József, Károlyi Lajos, Kont Gyula, Lengyel István tagtársaink elvesztését, kiknek emlékét hű kegyelettel meg fogjuk őrizni. A veszteségeket, melyek a multban a Választmányt érték, az utolsó Közgyűlés szerencsés választása iparkodott kiegyenlíteni.

Úgy hiszem, az egész tisztelt Közgyűlés nevében fejezhetem ki Társulatunk háláját a Magyar Tudományos Akadémia III. osztályának és Mathematikai és Természettudományi Bizottságának, hogy az elmult esztendőben is kegyes volt 2000 korona segélyezésben részesíteni. Őszinte köszönetünkhez csatoljuk azt a kérésünket, hogy a Magyar Tudományos Akadémia nagyértékű erkölcsi és anyagi támogatását a jövőre is engedje reméllenünk.

A hála szavaival rekesztem be jelentésemet; szóljon az mindazoknak, a kik üléseinket oly szorgalmasan látogatták, és azoknak, a kik a Társulat munkálkodásában tettel is részt vettek.

Kérem a tisztelt Közgyűlést, hogy a titkárság jelentését tudomásul venni sziveskedjék.

Budapest, 1904 április 21-ikén.

3—4. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1904-re és a pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.

Tisztelt Közgyűlés!

1903. évi összes bevételeink	8855	korona 85	fillér,
összes kiadásaink pedig	6332	« 26	«

tettek ki s így részint készpénzben, részint takarékpénztári betétben 2523 korona 59 fillér maradt az 1904. évre.

Hogy pénzügyi helyzetünkről tiszta képet nyerhessünk, ezen maradványhoz hozzá kell számítanunk az 1903. évre vonatkozó követeléseinket s viszont le kell számítanunk tartozásainkat is. Követeléseink összege 340 korona, t. i. 200 korona tagdíj, és 140 korona hirdetési díj hátralék. Tartozásaink összege 2314 kor. 41 fill., t. i. 1189 kor. 41 fill. nyomdai tartozás, 1125 kor. irói tiszteletdíj. A pénztári maradvány és követelések összege 2863 kor. 49 fillér, tehát 549 kor. 08 fillérrel mulja felül tartozásainkat.

Ezen kedvezőbb eredményt annak lehet tulajdonítani, hogy a legtöbb czímnél a bevétel túlhaladta az előirányzatot, viszont a kiadásoknál azon alul maradt.

Így több folyt be

az 1903. évi tagdíjakból	84	korona	—	fillér,
hátralékokból	561	«	—	«
hirdetési díjakból	40	«	—	«
előfizetési díjakból	218	«	50	«
vegyesekből	171	«	59	«
melyekhez még a már említett	340	«	—	«
összesen tehát	1415	korona	09	fillér

követelés is hozzájárul.

A kiadásoknál az előirányzaton alul maradtunk (a tartozásokat itt mindjárt tekintetbe véve):

irói tiszteletdíjaknál	234	korona	22	fillérrel
expeditiónál	93	«	59	«
irodai költségeknél	12	«	76	«
math. tanulóversenynél	52	«	—	«
összesen	392	korona	57	fillérrel.

Ellenben a kamatokból 15 korona 44 fillérrel kevesebb folyt be. Az előirányzatot ellenben túlléptük

a nyomdai költségeknél	68	korona	90	fillérrel
a vegyes kiadásoknál	174	«	06	«
összesen	242	korona	96	fillérrel,

tehát az eredmény kedvezőbb:

a bevételeknél	1415	korona	09	fillérrel
a kiadásoknál	392	«	57	«
összesen	1807	korona	66	fillérrel,
kedvezőtlenebb a bevételeknél	15	korona	44	fillérrel
« a kiadásoknál	242	«	96	«
összesen	258	korona	40	fillérrel,

ez utóbbi összeget az előbbiből levonva, 1549 korona 26 fillérrel előnyösebb a zárszámadás, mint az előirányzat volt.

Mélyen tisztelt Közgyűlés! Daczára annak, hogy zárszámadásunkban nincs deficzit, daczára annak, hogy a mult évet 500 koronán felüli megtakarítással zártuk le, még sem vagyunk abban a helyzetben, hogy ezen maradvány felhasználásával hiány nélküli költségelőirányzatot tudjunk készíteni. Ugyanis az 1904. évi költségelőirányzat 360 korona 92 fillér deficzittel zárul; egyébként a mult évi költségelőirányzattal csak csekély eltéréssel megegyezik.

Kérem a mélyen tisztelt Közgyűlést, hogy ezen rövid előadásomat tudomásul venni, a számvizsgáló-bizottság jelentésének meghallgatása után nekem az 1903. évre fölmentvényt adni s a bemutatott 1904. évi költség előirányzatot elfogadni kegyeskedjék.

E jelentés meghallgatása, az alábbi számadás és költségelőirányzat tételenkint való mérlegelése és a pénztárvizsgáló-bizottságnak felolvasott jelentése alapján a közgyűlés egyhangúlag megadja a pénztárnoknak a felmentvényt és 1904-iki költségelőirányzatát elfogadja.

1903. é

BEVÉTEL	Előirányzat Kor.	fill.	Eredmény Kor.	fill.
1903. évi zárszámadási maradvány	1996	20	1996	20
Alapitó dij	—	—	—	—
Folyó és köv. évi tagdijak	2200	—	2284	—
Hátralékos tagdijak	200	—	761	—
M. Tud. Akademia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési dijak	260	—	300	—
Kamatok	540	—	524	56
Előfizetési dijak	600	—	848	50
Vegyes s átmeneti bevételek			171	59
			8855	85

Vagyo

VAGYON	1902. év végén Kor.	fill.	1903. év végén Kor.	fill.
Forgó tőke:				
Készpénz	859	85	118	18
Leszám. és pénzv. bankban takp. betét	48	80	48	80
M. kir. postatakarékpénztárban	342	55	2024	51
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján	745	—	332	—
Alaptőke:				
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján:				
a) Készpénz	200	—	200	—
b) 2600 K névért. főv. kölcsönkötv. à 87	2262	—	2262	—
c) 1 drb koronajáradék-kötvény	100	—	100	—
Első hazai takarékpénztári betét	108	—	108	—
Majthényi Ottó-féle alap	10000	—	10000	—
Tagdijhátralékok	200	—	200	—
Föl nem vett hirdetési dij	100	—	140	—
	14966	20	15533	49

A számadásokat megvizsgáltuk és rendben találtu

A választmány megbizásából:

Rátz László s. k. *Beke Manó dr.* s. k.

1904. évi költsé

BEVÉTEL	1903. évi előirányzat Kor.	fill.	1904. évi előirányzat Kor.	fill.
1903. évi zárszámadási maradvány	1996	20	2523	49
Folyó évi tagdijak	2200	—	2200	—
Hátralékos tagdijak	200	—	200	—
M. Tud. Akadémia segélye	2000	—	2000	—
Hirdetési dijak	260	—	300	—
Kamatok	540	—	540	—
Előfizetési dijak	600	—	650	—
Hiány	1000	18	360	92
	8796	38	8774	41

írszámadás.

KIADÁS	Előirányzat Kor.	fill.	Eredmény Kor.	fill.
Nyomdai költségek	4833	38	3712	87
Irói tiszteletdijak	2903	—	1543	78
Expeditio	400	—	306	41
Irodai költségek	500	—	487	24
Vegyes és átmeneti kiadások	—	—	174	06
Középiskolai mathemat. tanulóverseny	160	—	108	—
Alaptőkéhez	—	—	—	—
Pénztári maradvány *a)* készpénzben			118	18
b) takarékp. betétben			2405	31
			8855	85

érleg.

TEHER	1902. év végén Kor.	fill.	1903. év végén Kor.	fill.
Nyomdai tartozások	1833	38	1189	41
Irói tiszteletdijak	503	—	1125	—
Tiszta vagyon	12632	82	13219	08
	14966	20	15533	49

dapesten, 1904 márczius 17. *Kövesligethy Radó dr.* s. k.

ügyvivő titkár.

A közgyülés megbizásából:

Bogyó Samu s. k. *Balog Mór* s. k.

őirányzat.

KIADÁS	1903. évi előirányzat Kor.	fill.	1904. évi előirányzat Kor.	fill.
Nyomdai tartozás	1833	38	1189	41
Folyó évi nyomdai költségek	3000	—	3000	—
Irói tiszteletdijak:				
a) a mult évre	503	—	1125	—
b) a folyó évre	2400	—	2400	—
Expeditio	400	—	400	—
Irodai költségek	500	—	500	—
Középisk. math. tanulóverseny	160	—	160	—
	8796	38	8774	41

Feichtinger Győző

pénztárnok.

5. Választmányi tagok választása.

A Társulat alapszabályainak 20. §-a értelmében a választmányból kilépnek Fröhlich Izidor, Klupathy Jenő, Rátz László és Tötössy Béla.

A választás idejére elnök felfüggeszti az ülést és Staub Sándor elnöklete alatt a Fröhlich Károly és Oberle Károly tagtársakból álló szavazatszedő-bizottságot küldi ki.

A választás megejtetvén, a bizottság jelenti az újból megnyitott közgyűlésnek, hogy a beadott 33 szavazat egyhangúlag újból Fröhlich Izidor, Klupathy Jenő, Rátz László és Tötössy Béla tagtársakat választmányi tagokká választja.

6. Indítványok.

Minthogy indítvány egyáltalán nem adatott be, a napirend ezen pontja magától elesik.

*

Elnök végre a pénztár vizsgálására a közgyűlés nevében ismét Balog Mór és Bogyó Samu tagtársakat kérte fel és ezzel a közgyűlés hivatalos része elintézést nyervén, a közgyűlést berekesztette.

*

A közgyülést rendes előadó ülés követte, melyen Kürschák József Jacobi születésének száz éves emlékezetére «Adalék a differencziálegyenletek elméletéhez» czímen értekezett.

Utalványczim: Math. és Phys. Társ. 5997. sz. cheque-számlájára.

Kimutatás

az 1904. év május és október hónapokban befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek

1898. évre: Grosz Ferencz ... 6 kor.

1899. évre: Grosz Ferencz 6 kor., Kappel György 6 kor., Stáhl Géza 6 kor., Széchy Ákos 6 kor. Összesen ... 24 kor.

1900. évre: Bujk Béla 6 kor., Fogarassi Béla 6 kor., Szerényi Géza 10 kor., Tatár Balázs 6 kor. Összesen ... 28 kor.

1901. évre: Héjas Endre ... 10 kor.

1902. évre: Kemény Ferencz dr. 10 kor., Klatt Virgil 6 kor., Strompf László 6 kor. Összesen ... 22 kor.

1903. évre: Babiak Nándor 6 kor., Dietz E. Lajos 10 k., Dobay Sándor 6 kor., Dohnáhnyi Frigyes 6 kor., Dobszay Antal 6 kor., Erdődy Imre 10 kor., Fabinyi Rezső 6 kor., Fettl Lipót 10 kor., Groo Vilmos 6 kor., Grünwald Miksa 6 kor., Harsányi Lajos 6 k., Hassák Vidor 6 kor, Hubatsek Alajos 10 kor., Jeney Pál 6 kor., Korbuly Emil 6 kor., Molnár Aladár 6 k., Nagy Vazul Pál, 6 kor., Németh Zsigmondné 6 k., Novothny Endre 6 kor., Pantea Jenő 6 k., Renner János 6 kor., Roth Ágoston 6 k., Steécz György dr. 6 k., Streitmann András 6 k., Toth Balázs 6 kor. Összesen ... 166 kor.

1904. évre: Antal Márkus 6 k., Aliquander Lajos 6 k., Bartoniek Géza 10 k., Bein Károly 10 k., Beck Károly 6 k., Benda Jenő 10 k., Bóbita Endre 6 k., Bodola Lajos 10 k., Bodola László 6 kor., Bozmánszky Gyárfás 6 kor., Buchböck Gusztáv 10 kor., Burkovits Lajos 6 kor., Csorba György 6 kor., Czakó Adolf 10 k., Dávid Lajos 6 kor., Demeczky Mihály dr. 10 k., Farbaky István 6 k., Fölser István 10 kor., Goldziher Károly dr. 10 kor., Habán Mihály 6 kor., Hahóthy Sándor 10 kor., Hajnal Márton 10 kor., Havas Miksa 10 kor., Heller Richárd 6 kor., Hoór Mór 10 kor., Horváth Kálmán 6 kor., Hőgyes Endre dr. 10 kor., Jurányi Henrik 10 k., Jakucs István 6 kor., Kerekes Dezső 6 kor., Kherndl Antal 10 k., Kiss Dénes 6 kor., Klupathy Jenő dr. 10 kor., Kovács István 6 k., Kövesligethy Radó dr. 10 kor., Kurländer Ignácz 10 kor., Lengyel Béla dr. 10 kor., Lengyel Endre 6 kor., Lengyel Imre 6 kor., Lipthay Sándor 10 kor., Lutter János 10 kor., Mátray Rudolf 6 k., Mialovich Mór 10 kor., Morotz Kálmán 10 kor., Muraközy Károly 10 kor., Müller József 10 kor., Nagy Béla 6 kor., Nagy Vazul Pál 6 k., Obláth Richard 6 kor., Ondrus Pál 6 k., Pék János 6 kor., Prokess Ignácz 6 kor., Rados Gusztáv 10 kor., Rejtő Sándor 10 k., Riesz Frigyes 6 kor., Róna Zsigmond 10 kor., Roth Ágoston 6 k., Rigó Ferencz 6 kor., Schöndorfer Gyula 6 kor., Schuller Alajos 10 kor., Schwartz Ottó dr. 6 kor., Söpkéz Sándor 10 kor., Süss Nándor 10 kor., Szabó Lajos 6 kor., Szalay István 6 kor., Szavkay Ede 10 kor., Szijártó Miklós 10 kor., Szily Kálmán 10 kor., Szuppan Vilmos 10 kor., Szupper Mártha 10 kor., Takáts Gyula 6 k., Thán Károly dr. 10 k., Thanhoffer Lajos dr. 10 kor., Tőtössy Béla 10 kor., Visnya Aladár dr. 6 kor., Wagner Alajos dr. 10 kor., Waldapfel János dr. 10 kor., Wartha Vincze dr. 10 kor. Összesen 658 kor.

1905. évre: Bozmánszky Gyárfás 6 kor., Lévay Ede dr. 10 kor., Zemplén Győző dr. 10 kor. Összesen ... ... 26 kor.

Előfizetési díjat fizettek:

1904. évre: Aradi áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti V. k. áll. főgymn. 10 kor., Budapesti V. k. áll. főreálisk. 10 kor., Budapesti VIII. k. áll. főgymn. 10 kor., Eperjesi ev. koll. magy. társ. 5 kor., Kecskeméti áll. főreálisk. 5 kor., Kolozsvári kegyesrendi Kalazantinum 10 kor., Pfeiffer Ferdinand 10 kor., Podolini kegyesrendi gymn. 10 kor., Salgó-tarjáni polg. isk. 10 kor., Székelyudvarhelyi r. kath. főgymn. 10 k., (1905. évre is 10 k). Összesen 110 kor

Összesen befolyt:

Hátralékokból	256.— kor.,	január 1-től	598.— kor.
f. és 1905. évi díjból ...	678.— «	« «	1685.— «
Előfizetési díjakból ...	110.— «	« «	744.— «

Kelt Budapesten, 1904 február 1.

Feichtinger Győző
pénztárnok.
(VII., Aréna-út 15.)

FORMÁK LEGNAGYOBB KÖZÖS OSZTÓJARÓL.

Mikor lesz valamely $[A]$ teljes holoid tartományból származó két formának legnagyobb közös osztója maga is *igazi forma?* E fontos kérdésre KŐNIG GYULA «*Az algebrai mennyiségek általános elméletének alapvonalai*» cz. művében (III. fej., 15. §.) a következő feleletet találjuk:

Az $[A]$ teljes holoid tartományból származó

$$F = F(x_1, x_2, \ldots, x_m), \qquad G = G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

formáknak, a melyek valamely x_i határozatlanra nézve szabályosak, legnagyobb közös osztója akkor és csak akkor igazi forma, ha x_i-re vonatkozó resultánsuk eltűnik.

Nem szabályos formákra nem kell külön kriterium, mert bármily formák vizsgálata lineáris transformatio segítségével visszavezethető szabályos formákéra. Mégis nem tartom érdektelennek a következő tétel levezetését, mely szabályos és nem szabályos formákra egyaránt érvényes.

Az $[A]$ teljes holoid tartományból származó

$$F = F(x_1, x_2, \ldots, x_m), \qquad G = G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

formák legnagyobb közös osztója akkor és csak akkor igazi forma, ha az

$$F_\lambda = F(x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2, \ldots, x_m + \lambda y_m)$$
$$G_\lambda = G(x_1 + \lambda x_1, x_2 + \lambda x_2, \ldots, x_m + \lambda y_m)$$

formáknak λ-ra vonatkozó resultánsa eltűnik. Itt $\lambda, y_1, y_2, \ldots, y_m$ új határozatlanok.

E feltétel szükséges volta közvetlenül világos. Ha ugyanis F és G oszthatók a

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

igazi formával, akkor egyszersmind F_λ és G_λ oszthatók λ-nak

$$D_\lambda = D(x_1+\lambda y_1, x_2+\lambda y_2, \ldots, x_m+\lambda y_m)$$

igazi formájával, a mi lehetetlen, ha az F_λ és G_λ formáknak λ-ra vonatkozó resultánsa nem tűnik el.

Viszont, ha e resultáns eltűnik, akkor

$$x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m, \lambda, y_m$$

helyébe

$$z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}, 0, z_m, 1$$

-et irván, nyilván

$$\bar{F} = F(z_1+z_m y_1, \ldots, z_{m-1}+z_m y_{m-1}, z_m)$$
$$\bar{G} = G(z_1+z_m y_1, \ldots, z_{m-1}+z_m y_{m-1}, z_m)$$

a $z_1, z_2, \ldots, z_m$ határozatlanoknak az

$$[\bar{A}] = \big[[A], y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}\big]$$

tartományból származó oly formái, a melyeknek z_m-re nézve szabályosak és a melyeknek z_m-re vonatkozó resultánsa eltűnik. Tehát e czikk elején idézett tétel értelmében eme két formának legnagyobb közös osztója a z-knek igazi formája. Legyen e forma

$$\Delta(z_1, z_2, \ldots, z_m; y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}).$$

$\bar{F}$ és $\bar{G}$ az F és G formákból az

$$x_1 = z_1+z_m y_1, \ldots, x_{m-1} = z_{m-1}+z_m y_{m-1}, x_m = z_m$$

transformatio révén keletkeztek, a melynek együtthatói az $[\bar{A}]$ tartományból származnak és a melynek determinánsa egyenlő az egységgel. E transformatiónak megforditása $\bar{F}$-et és $\bar{G}$-t ismét F-be és G-be viszi át, Δ-t pedig F-nek és G-nek mint az $[\bar{A}]$ tartományból származó formáknak legnagyobb közös osztójába, mely tehát csakugyan az x-eknek igazi formája. Itt F-et és G-t mint a $[\bar{A}]$ tartományból származó formákat fogtuk fel, de e formák legnagyobb közös osztója ugyanaz, akár az $[A]$, akár a $[\bar{A}]$ tartományt veszszük alapul.

Kürschák József.

AZ ÖSSZEADÁS ÉS SZORZÁS FORMÁLIS TÖRVÉNYEINEK EGYMÁSTÓL VALÓ FÜGGETLENSÉGE.

Kőnig Gyula most megjelent: «Az algebrai mennyiségek általános elméletének alapvonalai» cz. munkájában az algebrai mennyiségek számára megállapitandó kapcsolatoktól azt kivánja, hogy ezeknek alaki törvényei teljesen egybehangzók legyenek azokkal, a melyeket a raczionális számok tartományában az összeadás és szorzás követ. Ezután felsorolja az összeadás és szorzás alaki törvényeit és kiemeli, hogy ez alaki törvények egymástól függetlenek. Ennek kijelentésénél azonban tovább nem megy, mert az amúgy is terjedelmes munka keretébe egyszerű példák felsorolása nem illenének bele. A függetlenség bebizonyítása ugyanis olyképen történik, hogy konstruálunk oly műveleteket, a melyek egy-egy törvény kivételével a többiek mindnyájának eleget tesznek. Kőnig Gyula tanár úr e példák összeállításával engem bizott meg, mint olyan tanítványát, ki e kérdéssel legtöbbet foglalkozott.

Miután a fentemlített munkából átveszem azt a részt, mely az összeadás és szorzás alaki törvényeire vonatkozik, a czélom a következő:

Szerkesztek oly műveletet, a mely egy-egy törvény kivételével valamennyinek hódol. Ezzel kimutatom, hogy a kérdéses törvény független a] többitől. Minden egyes törvény függetlenségének kimutatására tehát egy-egy példa szükséges.

Mivel e műveleteket a közönséges összeadással és szorzással fogom definiálni, azért félreértések elkerülése végett a következő jelöléseket fogom használni. Az összeadáshoz hasonló műveletet A műveletnek nevezem; jele: $(+)$.

A szorzáshoz hasonló műveletet M műveletnek nevezem; jele: $(\times)$.

Az A művelet közönséges törvényei.

Valamely tartomány elemei az A művelet közönséges törvényeit követik, ha:

1. Két mennyiség egy előre megállapitott módon mindig meghatároz egy harmadikat:

$$\alpha(+)\beta=\sigma.$$

2. Érvényes a commutativ és associativ elv:

$$\alpha(+)\beta=\beta(+)\alpha$$

és

$$\big(\alpha(+)\beta\big)(+)\gamma=\alpha(+)\big(\beta(+)\gamma\big).$$

3. A művelet mindig egyértelműen megfordítható, azaz bármely α és β számhoz mindig található ξ, hogy:

$$\alpha(+)\xi=\beta.$$

Más munkákban, mint például a HILBERT «Die Grundlagen der Geometrie» cz. munkájában fel van még sorolva egy néhány törvény, mely azonban a többiből következik s így nem lett volna szabad az egymástól független törvények közé sorozni. Így HILBERT a zérus létezését postulálja, pedig ez következménye annak a törvénynek, mely kimondja, hogy az A művelet mindig egyértelműen megfordítható; tehát mindig található oly η, hogy:

$$\alpha(+)\eta=\alpha.$$

Ez az η a tartomány bármely más mennyiségére is így viselkedik, a mit az associativ és commutativ elv segitségével bizonyítok: u. i.

Az egyértelmű megfordithatóság értelmében, mindig van oly β, hogy:

$$\alpha'=\alpha(+)\beta$$

s így:

$$\alpha' = \alpha (+) \beta = \big(\alpha (+) \eta\big) (+) \beta = \alpha (+) \big(\eta (+) \beta\big) = \alpha (+) \big(\beta (+) \eta\big) =$$
$$= \big(\alpha (+) \beta\big) (+) \eta = \alpha' (+) \eta.$$

Azaz:

$$\alpha' = \alpha' (+) \eta.$$

Ez η az A művelet zérusa; jele: 0.

Az M művelet közönséges törvényei.

1. Két elem bizonyos előre meghatározott módon meghatároz egy harmadikat:

$$\alpha (\times) \beta = \pi.$$

2. Az M művelet commutativ és associativ:

$$\alpha (\times) \beta = \beta (\times) \alpha$$

és

$$\big(\alpha (\times) \beta (\times) \gamma = \alpha (\times) \big(\beta (\times) \gamma\big).$$

3. Vagy egyáltalában nincsen, vagy pedig csak egy oly singuláris δ mennyiség van, hogy

$$\delta (\times) \xi = \delta (\times) \eta$$

ámbár a meghatározott ξ és η mennyiségek egymástól különbözők.

4. Ha valamely tartomány mennyiségei egyszersmind az A művelet közönséges törvényeit is követik, akkor legyen még érvényes a distributiv elv is:

$$\big(\alpha (+) \beta\big) (\times) \gamma = \big(\alpha (\times) \gamma\big) (+) \big(\beta (\times) \gamma\big).$$

Ezekből a törvényekből a δ singuláris mennyiséget közelebbről is meghatározhatjuk.

A 3. törvény szerint u. i.

$$\delta (\times) \xi = \delta (\times) \eta.$$

Ebből következik, hogy:

$$\big(\delta (\times) \alpha\big) (\times) \xi = \big(\delta (\times) \alpha\big) (\times) \eta.$$

Tehát $\delta(\times)\alpha$ singuláris mennyiség, mivel azonban csak egy van, azért

$$\delta(\times)\alpha = \delta,$$

hol α-ra semmi megszorítás nem történt.

E δ nem más, mint az A művelet 0 mennyisége, mert:

$$\alpha(\times)\beta = \big(\alpha(+)0\big)(\times)\beta = \big(\alpha(\times)\beta\big)(+)\big(0(\times)\beta\big).$$

Azaz:

$$0 = 0(\times)\beta.$$

A mi pedig azt jelenti, hogy a 0 az M művelet singuláris száma.

*

Ha összehasonlítom az A és M műveletnek 3—3 pontban összefoglalt tulajdonságait, látom, hogy az M művelet az A műveletnél általánosabb. A két első pontban foglalt törvények ugyanitt teljesen ugyanazok. A harmadik törvény az A művelettől azt kivánja, hogy mindig egyértelműen megfordítható legyen; az M művelet pedig megengedi, hogy singuláris mennyiség létezzék; azaz, ha nem is egyenlő ξ és η, mégis lehetséges legyen, hogy:

$$\delta\xi = \delta\eta = \varepsilon.$$

A mi azt mondja, hogy a

$$\delta x = \varepsilon$$

egyenlet nem oldható meg egyértelműen, mert ξ is, η is eleget tesz neki. A megszorítás csak abból áll, hogy csak egy ily δ létezzék.

Nem szabad azonban azt hinnünk, hogy az M művelet minden más esetben egyértelműen megfordítható, mert lehet, hogy egyáltalán nem fordítható meg.

Ha tehát az első és második pontban foglalt követelésnek a többitől való függetlenségét vizsgálom, elegendő lesz, azt a speciálisabb műveletnél elvégezni, hol ugyanitt a harmadik követelés többet mond.

Viszont a harmadik követelés függetlenségének bebizonyításánál elegendő lesz kimutatni, hogy a kisebbik követelés sem függ a többitől, azaz, hogy lehet ily singuláris szám, tehát az A mű-velet nem megfordítható, sőt több ily singuláris szám is lehet, azaz az M harmadik követelése is független.

Mikor a distributiv elv függetlenségét akarom kimutatni, akkor egyszerre kell definiálnom A és M műveletet, a melyek mindenike eleget tesz a maga három pontban összefoglalt törvényeinek és a distributiv elv mégsem áll.

Tervem a következő:

I. *Szólok az A és M művelet első törvényéről.*

II. *Construálok oly műveletet, mely nem commutativ, de associativ és egyértelműen megfordítható. Ezt vehetem A vagy M műveletnek, a mint a $(+)$ vagy a $(\times)$ jelt használom.*

III. *Construálok oly műveletet, mely nem associativ, de commutativ és egyértelműen megfordítható.*

IV. *Construálok oly műveletet, mely commutativ és associativ, de több singuláris száma van.*

V. *Construálok oly A és M műveletet, mely külön-külön eleget tesz a maga három törvényének és mégsem lesz érvényes a distributiv elv.*

Itt egyúttal rámutatok arra, hogy az A zérusa és az M singuláris száma nem okvetlenül egyenlő, de azért egyenlő lehet.

I. Az A és M művelet első törvényének függetlenségéről nem lehet szó oly értelemben, mint a többinél, mert ha a tartomány két mennyisége egyáltalában nem határozna meg harmadikat, vagy pedig egynél többet határozna meg, akkor a többi törvényről szó sem lehetne.

II. A commutativ elv függetlenségének bizonyítására a következő mennyiségeket vezetem be:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

E symbolum jelentsen egy mennyiséget, ha a determinánsa az egység

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

hol α, β, γ, δ complex számok.

Az ilyen mennyiségek műveletét így definiálom:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2+\beta_1\gamma_2 & \alpha_1\beta_2+\beta_1\delta_2\\ \gamma_1\alpha_2+\delta_1\gamma_2 & \gamma_1\beta_2+\delta_1\delta_2\end{pmatrix}.$$

Azaz az új mennyiség elemeit úgy képezem, mint a determinánsok szorzásánál és pedig: az első mennyiség sorait a másodiknak oszlopaival componálom. Nem alkalmaztam műveleti jelet, hogy *A* és *M* műveletnek vehessem egyaránt.

E művelet nem commutativ:

$$\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_2\alpha_1+\beta_2\gamma_1 & \alpha_2\beta_1+\beta_2\delta_1\\ \gamma_2\alpha_1+\delta_2\gamma_1 & \gamma_2\beta_1+\delta_2\delta_1\end{pmatrix}.$$

Hogy e két eredmény egyenlő lehessen, szükséges, hogy a megfelelő elemek egyenlők legyenek; pl. mindjárt az elsők:

$$\alpha_1\alpha_2+\beta_1\gamma_2=\alpha_2\alpha_1+\beta_2\gamma_1$$

$$\beta_1\gamma_2=\beta_2\gamma_1$$

a mi pedig általában nem következik be. Tehát a művelet nem commutativ.

Kimutatom, hogy a művelet associativ:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_3 & \beta_3\\ \gamma_3 & \delta_3\end{pmatrix}.$$

Az itt kijelölt műveletet az associativ elvnél felmerülő két úton elvégezve, ezek az eredmények:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\beta_1\gamma_2\alpha_3+\alpha_1\beta_2\gamma_3+\beta_1\delta_2\gamma_3 & \alpha_1\alpha_2\beta_3+\beta_1\gamma_2\beta_3+\alpha_1\beta_2\delta_3+\beta_1\delta_2\delta_3\\ \gamma_1\alpha_2\alpha_3+\delta_1\gamma_2\alpha_3+\gamma_1\beta_2\gamma_3+\delta_1\delta_2\gamma_3 & \gamma_1\alpha_2\beta_3+\delta_1\gamma_2\beta_3+\gamma_1\beta_2\delta_3+\delta_1\delta_2\delta_3\end{pmatrix}$$

és

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\beta_2\gamma_3+\beta_1\gamma_2\alpha_3+\beta_1\delta_2\gamma_3 & \alpha_1\alpha_2\beta_3+\alpha_1\beta_2\delta_3+\beta_1\gamma_2\beta_3+\beta_1\delta_2\delta_3\\ \gamma_1\alpha_2\alpha_3+\gamma_1\beta_2\gamma_3+\delta_1\gamma_2\alpha_3+\delta_1\delta_2\gamma_3 & \gamma_1\alpha_2\beta_3+\gamma_1\beta_2\delta_3+\delta_1\gamma_2\beta_3+\delta_1\delta_2\delta_3\end{pmatrix}.$$

E két eredmény elemei sorban egyenlők, tehát áll az associativ elv.

E művelet egyértelműen megfordítható:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi & \eta\\ \zeta & \vartheta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{pmatrix}.$$

A baloldalon elvégzem a műveletet, egyenlővé teszem a megfelelő elemeket:

$$\alpha_1\xi+\beta_1\zeta=\alpha_2 \qquad \alpha_1\eta+\beta_1\vartheta=\beta_2$$
$$\gamma_1\xi+\delta_1\zeta=\gamma_2 \qquad \gamma_1\eta+\delta_1\vartheta=\delta_2.$$

Ez egyenletrendszerek determinánsa:

$$\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1=1.$$

Tehát ξ, η, ζ, ϑ egyértelműen meghatározható, a mi azt jelenti, hogy a művelet egyértelműen megfordítható.

III. Az associativ elv függetlenségének bizonyítása czéljából a complex számokra a következő műveletet vezetem be:

$$a\,(+)\,b=2\,(a+b).$$

Hogy e művelet commutativ, azt nem kell bebizonyítanunk.* E művelet nem associativ:

$$\big(a\,(+)\,b\big)\,(+)\,c=(2a+2b)\,(+)\,c=2\,(2a+2b+c)$$

$$a\,(+)\big(b\,(+)\,c\big)=a\,(+)\big(2b+2c\big)=2\,(a+2b+2c).$$

Hogy e művelet mindig egyértelműen megfordítható, látszik abból, hogy ez egyenletből:

$$2\,(a+x)=c$$

x mindig egyértelműen határozható meg.

IV. A 3-dik pontban foglalt követelések függetlenségének bizonyítására complex elemű számpárokra a következő műveletet definiálom:

$$(a_1,\,b_1)\,(\times)\,(a_2,\,b_2)=(a_1a_2,\;a_1b_2+a_2b_1).$$

Hogy e művelet commutativ, ez egyenletből látszik. Hogy e művelet associativ, arról a megfelelő műveletek elvégzése által győződhetünk meg, ha ugyanis az

$$(a_1,\,b_1),\quad (a_2,\,b_2)\quad \text{és}\quad (a_3,\,b_3)$$

* Azt ugyanis eleitől fogva bebizonyitottnak vettem, hogy a közönséges összeadás és szorzás hódol a formális törvényeknek.

mennyiségeket azon a bizonyos két módon összeszorozzuk, ugyanazt az eredményt kapjuk:

$$(a_1a_2a_3,\ a_1a_2b_3+a_1b_2a_3+b_1a_2a_3).$$

A mennyiségek e tartományának $(0, n)$ singuláris száma, mert (a, b_1) és (a, b_2) ugyan nem egyenlő, de:

$$(a, b_1)(\times)(0, n) = (a, b_2)(\times)(0, n),$$

mert:

$$(0, an) = (0, an)$$

n pedig felveheti minden elem értékét abból a tartományból, melyből az a-kat és b-ket választottuk. Tehát nemcsak egy singuláris mennyisége van e műveletnek, hanem végtelen sok.

Evvel kimutattam az A és M művelet 3-dik törvényének függetlenségét is.

Ismét kiemelem, hogy nemcsak akkor nem fordítható meg a művelet egyértelműen, ha singuláris szám lép be. Nagy szerepe van itt ama tartomány terjedelmének, melynek elemein a műveleteket végezzük.

Ha ugyanis az *egész számokon* ezt a műveletet végzem:

$$a(\times)b = ab$$

vagyis a közönséges szorzást, akkor e művelet ugyan commutativ és associativ, de nem fordítható meg mindig, ha nem is szerepel a tényezők között a singuláris szám. Mert ha pl. $a = 2$, $c = 5$, akkor az egész számok között nincs oly x, hogy az

$$2(\times)x = 2x = 5$$

egyenletet kielégítse.

Ennek oka az, hogy a tartomány szük, a min új mennyiségek adjungálásával szoktak segíteni. Ez esetben az új mennyiségek a törtszámok.

Lehetséges azonban, hogy semmiféle adjunctióval sem lehet segíteni. Ha ugyanis a valós számokra e műveletet definiálom:

$$a(+)b = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$$

és $|a| > c$, akkor nincs oly x, hogy az

$$(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = c$$

egyenletet kielégítse.

Lehetséges még, hogy a művelet, ha megfordítható, két eredményt kapok; például ennél a műveletnél:

$$a\,(\times)\,b = a^2b^2,$$

ha sem a, sem c nem a singuláris szám, akkor a complex számok tartományában mindig két oly x van, hogy az

$$a^2x^2 = c$$

egyenletet kielégítse.

V. A distributiv elv tárgyalásánál legyen A a közönséges összeadás és M a következő művelet:

$$a\,(\times)\,b = (a+1)(b+1)-1.$$

Hogy ez commutativ, egyenesen látszik. Hogy associativ, az bizonyítja, hogy azon a többször említett két úton ugyanazt az eredményt nyerjük:

$$a\,(\times)\,b\,(\times)\,c = (a+1)(b+1)(c+1)-1.$$

E művelet egyetlen singuláris száma: $=1$, ugyanis

$$a(\times)(-1) = (a+1)(-1+1)-1 = -1.$$

Tehát az A zérusa és az M singuláris száma nem ugyanaz a mennyiség. Az A és M törvényeiből pedig levezettük, hogy e két számnak össze kell esnie. Következik, hogy itt valamely törvény nem érvényes. A distributiv törvény kivételével már mindről kimutattuk, hogy érvényes. Szükségképen a distributiv törvény nem érvényes.

Ez különben a számításokból is kitűnik. Ime:

$$\big(a\,(+)\,b\big)(\times)\,c = (a+b)(\times)\,c = (a+b+1)(c+1)-1 =$$
$$= ac+bc+a+b+c$$

és

$$\big(a\,(\times)\,c\big)(+)\big(b\,(\times)\,c\big) = [(a+1)(c+1)-1] + [(b+1)(c+1)-1] =$$
$$= ac+bc+a+b+2c.$$

Ez a két eredmény pedig általában nem egyenlő. E példa alapján azonban nem szabad azt gondolnunk, hogy a zérus és a singuláris szám összeesése æquivalens a distributiv elv fennállásával. A zérus és singuláris szám összeesése kevesebbet mond, mint a distributiv elv.

Ha ugyanis az A műveletet így definiálom:

$$a(+)b = \sqrt[3]{a^3+b^3+1}$$

(a műveletet csak valós számokra definiálom s a gyökmennyiség alatt itt a valóst értem).

Az M műveletet pedig ugyanúgy definiálom, mint az elébb:

$$a(\times)b = (a+1)(b+1)-1.$$

Akkor mindkét művelet eleget tesz a maga három követelésének; az A művelet zérusa és az M singuláris száma összeesik, mindkettő: -1, s a distributiv elv mégsem érvényes:

$$\big(a(+)b\big)(\times)c = (\sqrt[3]{a^3+b^3+1}+1)(c+1)-1$$

$$\big(a(\times)c\big)(+)\big(b(\times)c\big) =$$
$$= \sqrt[3]{[(a+1)(c+1)-1]^3+[(b+1)(c+1)-1]^3+1}.$$

E két eredmény általában nem egyenlő; ha pl.:

$$a = b = c = 2,$$

akkor az első kifejezés $3\sqrt[3]{17}+2$, a második $\sqrt[3]{687}$, a mely értékek pedig nem egyenlők.

*

E vizsgálat teljesnek akkor volna mondható, ha az A és M művelet három-három törvényének a distributiv elvtől való függetlenségét is bebizonyítottam volna, mert hiszen ez úgy az A, mint az M műveletnek igen lényeges tulajdonságát mondja ki. Tehát mindig A és M műveletet egyszerre kellett volna definiálni.

De ily példák construálása nem sikerült minden egyes esetre s így inkább egy kisebb, de magában zárt egészet nyujtok. Igérem azonban, hogy nem hagyok fel ily irányú próbálkozásaimmal s ha sikerül, kiegészítem vizsgálataimat.

Juvancz Irén.

ADALÉKOK AZ IRREDUCZIBILIS EGYENLETEK ELMÉLETÉHEZ.

(Második közlemény.)

I.

1. Legyen

$$f(z)=z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_n \tag{1}$$

az [1] tartomány valamely formája, tehát a c_i együtthatók raczionális egész számok. Tegyük fel, hogy $f(z)$ a p törzsmodulusra irreduczibilis forma. Legyen továbbá az $M(z)$ forma (a mely z-t esetleg nem is tartalmazza) a z-ben alacsonyabb fokú, mint $f^t(z)$ és tegyük fel, hogy $M(z)$ az $f(z)$ formával (mod. p) nem osztható. Ki fogjuk mutatni a következő tétel érvényességét.

Ha az aequivalenczia értelmében

$$(t, a) = 1,$$

akkor a

$$F(z)=f^t(z)+p^a M(z)=0 \tag{I}$$

egyenlet irreduczibilis.

A tételt $a=1$ esetére már Schönemann kimutatta.*

2. Legyen ω az (I) egyenletnek valamely gyöke, a mely a (Γ) genustartományt állapítja meg. Akkor mindenekelőtt feltevéseink szerint $f(\omega)$ *egész* szám és (I)-ből következik, hogy

$$f^t(\omega)\equiv 0 \text{ (mod. } p^a). \tag{2}$$

---

* Crelle XXXII. Von denjenigen Moduln, welche Potenzen von Primzahlen sind. §. 61. Az ottani bebizonyitás könnyen egyszerűsithető, ugyanis nem kell a racz. számok köréből kilépnünk. E helyen idézem még Netto-nak idevágó dolgozatait. Über die Irreductibilität ganzzahliger ganzer Funct. (Oberhessische Ber. 31). Über die Irr. ganzzahliger ganzer Funct. (Math. Annalen 48).

Meg fogjuk mutatni, hogy az æquivalenczia értelmében

$$\left(\frac{f^t(\omega)}{p^\alpha}, p\right) = 1. \qquad (2^\star)$$

Ha először is az M forma a z-t valóban nem tartalmazza, skkor M a p-hez relativ prim és így (I)-ből közvetetlenűl kiadódik a ($2^\star$) alatti állitás. Ha M a z-t valóban tartalmazza, akkor feltevéseink szerint a következő resultáns:

$$R = \text{Res.} \begin{pmatrix} f^t(z), & M(z) \\ z, & 1 \end{pmatrix}$$

relativ prim p-hez, azaz

$$(R, p) = 1. \qquad (3)$$

De másrészről:

$$R = Uf^t(z) + VM(z), \qquad (3^\star)$$

a hol U és V az [1]-ből származó formák. És így (3) és ($3^\star$)-ból következik, hogy az æquivalenczia ertelmében

$$\big(M(\omega), p\big) = 1,$$

vagyis csakugyan

$$\left(\frac{f^t(\omega)}{p^\alpha}, p\right) = 1. \qquad (2^\star)$$

3. Könnyű most kimutatni, hogy a (Γ) tartomány fokszáma t-nek többszöröse. Legyen ugyanis a (Γ)-ban primideáltényezőkre bontva:

$$p = \mathfrak{p}_1^{e_1} \mathfrak{p}_2^{e_2} \dots \mathfrak{p}_k^{e_k}$$

és

$$f(\omega) = \mathfrak{p}_1^{a_1} \mathfrak{p}_2^{a_2} \dots \mathfrak{p}_k^{a_k} \mathfrak{O}, \ (p, \mathfrak{O}) = 1,$$

akkor (2) és ($2^\star$) szerint

$$ta_i = \alpha e_i$$
$$(i = 1, 2, \dots, k)$$

és így, minthogy

$$(t, \alpha) = 1$$

lesz:

$$e_i \equiv 0 \ (\text{mod. } t),$$

tehát a (Γ)-ra képezett Nm. p osztható p^t-vel, a mivel állításunk igazolva van.

4. Jelöljük most $\mathfrak{p}$-vel p-nek valamely törzstényezőjét. Tételünk teljesen be lesz bizonyítva, ha kitudjuk mutatni, hogy a $\mathfrak{p}$ ideál foka nem kisebb, mint n, mert ekkor Nm.$\mathfrak{p}$ osztható p^{nt}-vel; sőt evvel az is bebizonyúl, hogy:

$$p=\mathfrak{p}^t.$$

5. Az ideál fokszámára vonatkozó állításunk — mint ismeretes — egyenlő értékű avval az állítással, hogy a (mod. $\mathfrak{p}$) inkongruens számok számossága nem kisebb, mint p^n. Erre nézve pedig elég lesz kimutatni, hogy ha $g(z)$ oly forma, melynek legmagasabb együtthatója 1, akkor a

$$g(\omega)\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}} \tag{4}$$

kongruencziából következik:

$$g(z)\equiv 0 \;(\text{modd. } p,\ f(z)). \tag{4*}$$

De ez tényleg így van. Ha ugyanis (4*) nincs kielégítve, akkor $g(z)$ és $f(z)$ (mod. p) relativ primek és így léteznek oly $C(z)$, $D(z)$ formák, a melyekre nézve:

$$C(z)\, g(z)+D(z)\, f(z)\equiv 1 \pmod{p}$$

és így

$$\{C(z)\, g(z)-1\}^t\equiv D^t(z)\, f^t(z) \pmod{p}. \tag{5}$$

Azonban

$$f^t(\omega)\equiv 0 \pmod{p^\alpha},$$

tehát

$$\{C(\omega)\, g(\omega)-1\}^t\equiv 0 \pmod{p},$$

azaz:

$$g(\omega)\, C(\omega)\equiv(-1)^{t+1} \pmod{\mathfrak{p}}, \tag{5*}$$

vagyis a (4) alatti kongruenczia nincs kielégítve, a mivel tételünk be van bizonyítva. A tétel kétszeri alkalmazása azt adja, hogy az $F(z)$ forma már (mod. $p^{\alpha+1}$) irreduczibilis oly értelemben, hogy nem bontható oly formák szorzatára, melyekben z legmagasabb hatványának együtthatója relativ prim p-hez.

II.

Ha tételünk általánositását keressük arra az esetre, midőn az egyenlet együtthatói valamely $[(A), x_1, x_2, \ldots, x_m]$, illetőleg $[[1], x_1, x_2, \ldots, x_m]$ holoid tartomány mennyiségei, akkor p helyett a holoid tartomány P törzsmennyiségét kell vennünk és a *mod.* helyett az *aequ. modulust.** A tétel bebizonyitása $a=1$-re a Schönemann-féle értekezésből könnyen kiolvasható.

Tetszőleges a-ra nem sikerült nekem a bebizonyitás; azonban álljanak itt a következő megjegyzések. Mindenekelőtt a (Γ) tartomány fokszáma t-nek többszöröse.

Ugyanis (*aequ. mod.* P) a felbontások egyértelműek** s így a 2. és 3. alatti meggondolások átvihetők az általános egyenletre. Könnyű továbbá kimutatni, hogy a (Γ) tartomány fokszáma n-nek többszöröse.

Ugyanis annak az irreduczibilis egyenletnek, melynek ω gyöke, alakja a következő:

$$\Phi(z)=z^v+\cdots=0, \tag{6}$$

mert feltettük, hogy $M(z)$ fokszáma kisebb, mint az $f^t(z)$ formáé. Azonban az æquiv. modulus elmélete szerint:

$$\Phi(z) \sim f^d(z) \text{ (æqu. mod. } P)$$

és így csakugyan

$$v \equiv 0 \text{ (mod. } n).$$

Bauer Mihály.

---

* Az *aequ. modulus* fontos fogalmát König tanár úr vezette be az algebrai mennyiségek általános elmétetébe. E fogalomalkotással sikerült neki a Kronecker-féle alaperedmények rektifikácziója. Lásd: «Az algebrai mennyiségek általános elméletének alapvonalai».

** I. h. IX. fej. 17—20. §-ok.

A KÚPSZELET MINT GEOMETRIAI HELY.

(Második közlemény.)

13. A $d^{(2)}$ és $d_i^{(2)}$ hiperbolák melléktengelyeik körül forgatva oly hasonló és hasonló fekvésű $D^{(2)}$ és $D_i^{(2)}$ egyágú hiperboloidokat írnak le, a melyek egymást egy $e^{(2)}$ ellipsisben és egy végtelen távol fekvő valós kúpszeletben metszik. Az $e^{(2)}$-nek ε síkja merőleges a hiperboláknak δ síkjára, főtengelye RR' ($= 2b$-vel) a hiperboloidoknak forgástengelyeivel φ szöget képez és melléktengelye SS' egyenlő NN'-sel ($2a$-val). A hiperboloidoknak æquatorai, fokális körei, és vezérlő hengereinek metszőkörei az illető æquatorok síkjaival megfelelőleg egy $N^{(2)}$, $H^{(2)}$ és $G^{(2)}$ ellipsoidon vannak. Ezeknek körmetsző átmérősíkja a $D^{(2)}$-nek æquatorsíkja α; az ehhez kapcsolt átmérőn az UU' pontok hatványpontok, végre a második és harmadik ellipsoid egymásnak poláris alakzata az első ellipsoidra vonatkozólag.

Bármelyik $D_i^{(2)}$ hiperboloid pontjainak távolságai a saját fokális körének egy pontjától és az ehhez tartozó vezérlő vonaltól (mely utóbbi az $e^{(2)}$ ellipsisnek síkját a görbén belül metszi) oly viszonyban vannak, mint $\sqrt{a^2+b^2} : \sqrt{a^2\sin^2\varphi - b^2}$.

Az $e^{(2)}$ ellipsis pedig fokális ellipsise annak a $H^{(2)}$ ellipsoidnak, a mely a $D^{(2)}$ és $D_i^{(2)}$ hiperboloidoknak fokális köreit tartja.

Fordítva:

«Ha a $2a$ és $2b$ tengelylyel biró $e^{(2)}$ ellipsis és egy φ szög van adva úgy, hogy $\sin\varphi > \frac{b}{a}$, akkor mindig lehet azon oly hasonló és hasonló fekvésű egyágú forgáshiperboloidokat keresztül helyezni, a melyeknek forgástengelyei az $e^{(2)}$-nek főtengelyével φ szöget képeznek és az $e^{(2)}$-nek melléktengelyére merőlegesek.

Ezeknek fokális körei egy oly $H^{(2)}$ ellipsoidon vannak, a melynek az $e^{(2)}$ a fokális ellipsise. A φ szög változtatásával a $H^{(2)}$ ellipsoid leírja az egész fokális ellipsoidsereget és így betölti az egész tért.»

Ezért:

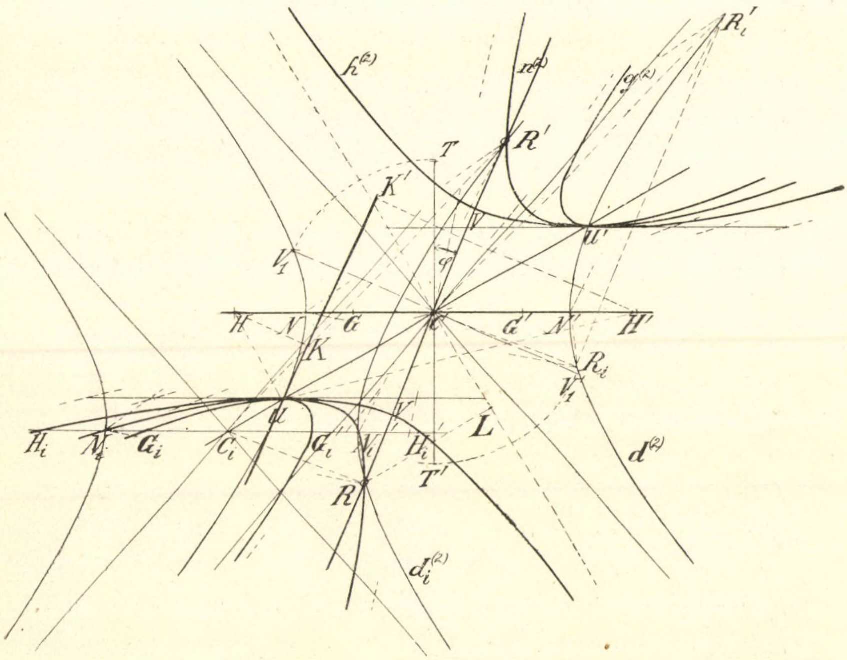
Ha adva van az $e^{(2)}$ ellipsis, melynek fő- és melléktengelye $2a$ és $2b$, és egy F pont, akkor mindig lehet az ellipsis melléktengelyére merőleges és a főtengelyhez egy bizonyos φ szög alatt hajló oly f egyenest (és annak az $e^{(2)}$ síkjára vonatkozó tükörképét f'-t) találni, hogy az ellipsis pontjainak távolságai az F ponttól és az f (és az f') egyenestől $\sqrt{a^2-b^2} : \sqrt{a^2\sin^2\varphi-b^2}$ viszonyban legyenek. Ez az f (és f') egyenes az ellipsis síkját az ellipsisen belül metszi. —

14. Vegyünk fel ismét egy $d^{(2)}$ hiperbolát (7. ábra), melynek középpontja a C, főtengelye NN', melléktengelyén a hatványpontok TT', gyújtópontjai HH', és vezérlő vonalainak metszőpontjai a főtengelylyel GG'. E hiperbolának egy kapcsolt átmérőpárja az RR', UU'; az elson az RR' pontok hatványpontok, a másodikon pedig az UU' pontok hiperbolapontok.

Az RR' pontokon keresztül a $d^{(2)}$ hasonló és hasonló fekvésű $d_i^{(2)}$ hiperbolákat vezetünk és felkeressük geometriai helyét $n^{(2)}$-őt, $h^{(2)}$-őt és $g^{(2)}$-őt e hiperbolák N_iN_i' csúcsainak, H_iH_i' gyújtópontjainak és a vezérlő vonalak G_iG_i' metszőpontjainak az illető hiperbolák főtengelyeivel.

E végből fölveszszük a C_i pontot az UU' átmérőn az UU' véges vonaldarabon kívül, és azt a $d_i^{(2)}$ hiperbola középpontjának tekintjük. A C_iR, C_iR' félsugarakkal a C ponton keresztül vezetett párhuzamosak a $d^{(2)}$-őt az R_iR_i' pontokban metszik; az $R_iR_i'NN'$ négyszöggel hasonló és hasonló fekvésű $RR'N_iN_i'$ négyszögnek N_iN_i' szögpontjai, csúcsai a $d_i^{(2)}$-nek. Ezek az N_iN_i' pontok az előbbi okoknál fogva ismét egy $n^{(2)}$ kúpszeleten lesznek és $n^{(2)}$ jelenleg hiperbola. Ennek középpontja a C, asimptótái párhuzamosak az $NUN'U'$ parallelogrammának oldalaival, kapcsolt átmérői UU', NN' és RR', TT'. Az UU', RR' pontok az $n^{(2)}$-nek valós pontjai, az NN', TT' pontok pedig hatványpontok az illető átmérőkön. A $d_i^{(2)}$ hiperbolák közül kettő annak asimptótáiba megy át, t. i. az a kettő, a melynek középpontja az U és az U'. A $d_i^{(2)}$ hiperboláknak az UU' véges vonaldarabon nincsen középpontjuk.

A $h^{(2)}$ és $g^{(2)}$ görbék, melyek az $n^{(2)}$-vel az UU' affinitási tengelyre vonatkozólag affinek, szintén hiperbolák; ezeknek egy



7. ábra.

metszőátmérőjük az UU'; az ehhez kapcsolt átmérőn a hatványpontok HH', illetve GG'. A $h^{(2)}$ és $g^{(2)}$ hiperbolák poláris alakzatai egymásnak az $n^{(2)}$-re vonatkozólag.

A $h^{(2)}$ hiperbolának asimptótái párhuzamosak az UH, UH' egyenesekkel, melyek a $d^{(2)}$ hiperbolának U pontjához tartozó vonósugarak. A HUH' szögnek felezője érintője a $d^{(2)}$-nek és párhuzamos az RR' egyessel, tehát RR' főtengelye a $h^{(2)}$-nek.

Viszont az RU, $R'U$ egyenesek párhuzamosak a $d^{(2)}$-nek asimptótáival (mert RR', UU' egy kapcsolt átmérőpárja a $d^{(2)}$-nek); a $h^{(2)}$-nek érintője az U pontban pedig párhuzamos a $d^{(2)}$-nek főtengelyével, mely a $d^{(2)}$ asimptótáinak egyik hajlásszögét felezi, ez az érintő tehát az RUR' szöget is felezi és így az RR' pontok gyújtópontjai a $h^{(2)}$-nek.

Ha a $d^{(2)}$ hiperbola H és H' gyújtópontjaiból az U pont érintőjére bocsátott merőlegeseknek talppontjai a K és K', és a $h^{(2)}$ hiperbola R gyújtópontjából annak egyik asimptótájára bocsátott merőlegeseknek talppontja az L, úgy az UHK, $UH'K'$, CRL háromszögeknek hasonlóságából következik, hogy

$$HU:HK = H'U:H'K' = CR:RL.$$

De a $d^{(2)}$ hiperbola U pontjához futó HU, $H'U$ vonósugaraknak szorzata egyenlő $\overline{CR}^2$-tel, tehát az előbbi proporczió miatt

$$HK.H'K' = \overline{RL}^2.$$

Ennek az egyenletnek bal oldala a $d^{(2)}$ hiperbola melléktengelyének negativ négyzete, a jobb oldala pedig a $h^{(2)}$ hiperbola melléktengelyének negativ négyzete, és így ama hiperboláknak TT', V_1V_1' melléktengelyei jelen esetben is egyenlők. — A $h^{(2)}$ hiperbolának VC félfőtengelye pedig egyenlő $\sqrt{\overline{RC}^2 - \overline{TC}^2}$.

Ha a $d^{(2)}$ hiperbolának NN' főtengelyét $2b$-vel, a TT' melléktengelyén a hatványpontok távolságát $2\mathfrak{a}$-val, az RR' hatványpontjainak távolságát $2a$-val, az NN', RR' egyenesek hajlásszögeinek pótlószögét φ-vel jelöljük, és ha

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad \mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}^2 + b^2, \quad m_2^2 = a^2 \sin^2\varphi + b^2,$$

akkor a $d^{(2)}$-hez kapcsolt (konjugált) hiperbolának

$$-\frac{a^2 \sin^2\varphi}{b^2} + \frac{a^2 \cos^2\varphi}{\mathfrak{a}^2} = 1$$

egyenletéből

$$\mathfrak{a} = \frac{ab\cos\varphi}{m_2}, \quad m_2 = b \cdot \frac{c}{\mathfrak{c}}, \quad \cos\varphi = \frac{\mathfrak{a}}{a} \cdot \frac{c}{\mathfrak{c}},$$

végre bármelyik $d_i^{(2)}$ hiperbola pontjainak távolságai a saját gyújtópontjától és az ahhoz tartozó vezérlő vonaltól oly viszonyban van, mint $c:m_2$, vagy a véle egyenlő $c:b$.

Ezek után eredményképen ide írhatjuk a következőket:

Ha valamely síkban egy hiperbolát és oly két pontot veszünk fel, melynek összekötő egyenese a hiperbolát képzetes pontokban metsző hiperbola-átmérővel párhuzamos, akkor a két ponton keresztül menő és a felvett hiperbolával hasonló és hasonló fekvésű hiperboláknak gyújtópontjai szintén egy hiperbolán vannak. Ez utóbbinak két gyújtópontja a két felvett pont, melléktengelye pedig oly nagy, mint annak a hiperbolának melléktengelye, mely az adotthoz hasonló és hasonló fekvésű és a két adott pont, annak egy átmérőjén két hatványpont.

15. A $d_i^{(2)}$ hiperbolák melléktengelyük körül forgatva hasonló és hasonló fekvésű $D_i^{(2)}$ egyágú hiperboloidokat írnak le; ezek a hiperboloidok egymást egy $e^{(2)}$ hiperbolában és egy végtelen távol fekvő valós kúpszeletben metszik. Az $e^{( )}$ hiperbolának ε síkja merőleges a $d_i^{(2)}$ hiperboláknak δ síkjára, főtengelye RR' ($2a$) a $D_i^{(2)}$ hiperboloidoknak forgástengelyeivel φ szöget képez, melléktengelye SS' egyenlő NN'-sel ($2b$-vel).

A $D_i^{(2)}$ hiperboloidok æquatorai, fokális körei, vezérlő hengereinek metszőkörei az illető æquatorsíkokkal megfelelőleg egy $N^{(2)}$, $H^{(2)}$, $G^{(2)}$ kétágú hiperboloidon vannak, melyeknek közös átmérőjük az UU', az ehhez kapcsolt átmérősík pedig párhuzamos a $D_i^{(2)}$ hiperboloidok æquatorainak síkjaival. A $H^{(2)}$ és $G^{(2)}$ hiperboloidok egymásnak poláris alakzatai az $N^{(2)}$-re vonatkozólag.

Bármelyik $D_i^{(2)}$ hiperboloid pontjainak távolságai a saját fokális körének egy pontjától és az ahhoz tartozó vezérlő vonaltól (mely utóbbi az $e^{(2)}$ hiperbolának síkját a hiperbolán belől metszi), oly viszonyban vannak, mint $\sqrt{a^2+b^2} : \sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2}$.

Az $e^{(2)}$ fokális hiperbolája annak a $H^{(2)}$ kétágú hiperboloidnak, mely a $D_i^{(2)}$ egyágú hiperboloidsornak fokális köreit tartja.

Fordítva:

«Ha az $e^{(2)}$ hiperbola adva van, akkor mindig lehet azon keresztül oly hasonló és hasonló fekvésű egyágú forgáshiperboloidokat vezetni, melyeknek forgástengelyei az $e^{(2)}$-nek főtengelyével φ szöget képeznek és melléktengelyére merőlegesek. Ezeknek fokális körei egy oly $H^{(2)}$ kétágú hiperboloidon vannak, a melynek az $e^{(2)}$ fokális hiperbolája. A φ szög változásával a $H^{(2)}$ leírja az egész kétágú hiperboloidsereget, mely az egész tért betölti.»

Ezért:

Ha adva van az $e^{(2)}$ hiperbola, melynek fő- és melléktengelye $2a$ és $2b$, és egy F pont, úgy mindig lehet ennek a melléktengelyére merőleges és a főtengelyéhez egy bizonyos φ szög alatt hajló oly f egyenest (és annak az $e^{(2)}$ síkjára vonatkozó f' tükörképét) találni, hogy a hiperbola pontjainak távolságai az F ponttól és az f (valamint az f') egyenestől $\sqrt{a^2+b^2} : \sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2}$ viszonyban legyenek. Ez az f (és f') egyenes az $e^{(2)}$ hiperbola síkját a hiperbolán belől metszi. —

16. Szerkeszszünk most a 14. pontban adott $d^{(2)}$ hiperbolához hasonló $d_i^{(2)}$ hiperbolákat, a melyek az RR' átmérőnek és a $d^{(2)}$ hiperbolának kapcsolt képzetes metszőpontjain mennek keresztül (8. ábra), és keressük fel ismét azokat az $n^{(2)}$, $h^{(2)}$ és $g^{(2)}$ görbéket, a melyek ezeknek a $d_i^{(2)}$ hiperboláknak N_iN_i' csúcsait, H_iH_i' gyújtópontjait, és vezérlő vonalaknak G_iG_i' metszőpontjait az illető főtengelyekkel tartják.

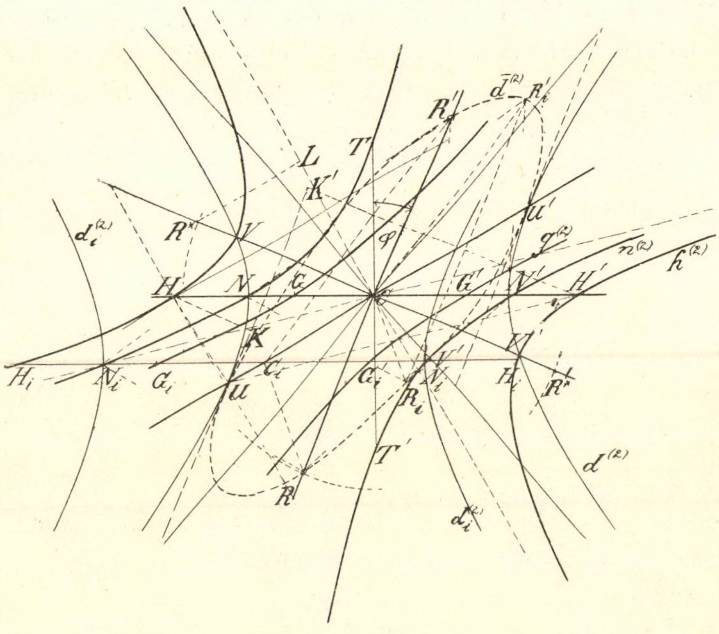
E végből az RR'-hez kapcsolt UU' átmérőn felveszünk egy C_i pontot, és a C ponton keresztül a C_iR és C_iR' félsugarakkal párhuzamos CR_i és CR_i' félsugarakat vezetünk. Ezek az UU' RR' kapcsolt átmérőkkel biró $\overline{d}^{(2)}$ ellipsist, mely a $d^{(2)}$-nek úgynevezett képzetes projekcziója,* az R_iR_i' pontokban metszik. Az $R_iR_i'NN'$-sel hasonló és hasonló fekvésű $RR'N_iN_i'$ négyszögnek N_iN_i' szögpontjai a $d_i^{(2)}$ hiperbolák egyikének csúcsai. Ezek az N_iN_i' pontok egy oly $n^{(2)}$ hiperbolán vannak, a melynek az NN', UU' egy kapcsolt átmérőpárja és ez utóbbi az UU' pon-

---

* WIENER C.: Darstellende Geometrie, I. köt. 315. old.

tok hatványpontok; a TT', RR' egy másik kapcsolt átmérőpárja és ez utóbbin az RR' pontok szintén hatványpontok.

A $h^{(2)}$ és $g^{(2)}$ görbék az $n^{(2)}$-vel az UU' affinitási tengelyre vonatkozólag affin hiperbolák és egymásnak poláris alakzatai az $n^{(2)}$-re vonatkozólag; a HH', UU', illetve a GG', UU' átmérőpárok pedig kapcsoltak és ez utóbbiakon az UU' pontok hatványpontok. A $d^{(2)}$ hiperbola U pontjához tartozó UH, UH'



8. ábra.

vonósugarak a $h^{(2)}$-nek asimptótáival párhuzamosak, tehát az RR', mely a HUH' szögnek felezőjével párhuzamos, mellék-tengelye a $h^{(2)}$-nek.

A $h^{(2)}$ hiperbola H pontjának érintője és normálisa az RR' egyenest a $d^{(2)}$-re vonatkozólag kapcsolt pólusokban metszi, mert a normálisnak metszőpontja az RR'-sel pólusa az érintőnek; a két metszőpontnak a C középponttól mért távolsága egymással szorozva a $\overline{CR}^2$-tel egyenlő. Ugyancsak a H pont érintője és normálisa a $h^{(2)}$ hiperbolának főtengelyét, a mely az RR'-re a C pontban merőlegesen áll, oly két pontban metszi, a melyeknek a C középponttól mért távolságai egymással szorozva szintén a $\overline{CR}^2$-tel egyenlő. Ámde a két utóbbi metszőpont a $h^{(2)}$ hiperbolának $R^\star R'^\star$ gyújtópontjaitól harmonikusan van elválasztva. Ezért a $h^{(2)}$ hiperbolának $R^\star R'^\star$ gyújtópontjai a C középponttól CR távolságra vannak.

Ha ismét a $d^{(2)}$ hiperbolának H, H' gyújtópontjaiból az U pontnak érintőjére bocsátott merőlegeseknek talppontjait K és K'-sel, a $h^{(2)}$ hiperbolának $R^\star$ gyújtópontjából annak egyik asimptótájára bocsátott merőlegesnek talppontját L-lel jelöljük, akkor az

$$UHK, \quad UH'K', \quad R^\star CL$$

háromszögeknek hasonlóságából következik, hogy

$$UH : HK = UH' : H'K' = R^\star C : CL.$$

A $d^{(2)}$ hiperbola U pontjához futó UH, UH' vonósugaraknak szorzata egyenlő $\overline{RC}^2 = \overline{R^\star C}^2$-tel, tehát a proporczió miatt

$$HK \,.\, H'K' = \overline{CL}^2,$$

és mert ez egyenletnek bal oldala a $d^{(2)}$ melléktengelyének, CT-nek négyzete absolutusan véve, jobb oldala pedig a $h^{(2)}$ főtengelyének négyzete, azért a $h^{(2)}$-nek főtengelye VV' egyenlő a $d^{(2)}$ hiperbola TT' hatványpontjainak távolságával.

Ha a $d^{(2)}$ hiperbolának NN' főtengelyét $2a$-val, a TT' melléktengelyén a hatványpontok távolságát $2\mathfrak{b}$-vel, az RR' hatványpontok távolságát $2b$-vel az NN', RR' egyenesek hajlásszögének pótlószögét φ-vel jelöljük, és ha

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad \mathfrak{c}^2 = a^2 + \mathfrak{b}^2, \quad m_3^2 = a^2 + b^2 \sin^2\varphi,$$

akkor a $d^{(2)}$-nek egyenletéből, mint előbb következik, hogy

$$\mathfrak{b} = TC = VC = \frac{ab\cos\varphi}{m_3}, \quad m_3 = a\cdot\frac{c}{\mathfrak{c}}, \quad \cos\varphi = \frac{\mathfrak{b}}{b}\cdot\frac{c}{\mathfrak{c}}\cdot$$

Végre bármelyik $d_i^{(2)}$ hiperbola pontjainak távolságai a saját gyújtópontjától és az ahhoz tartozó vezérlő vonaltól oly viszonyban vannak, mint $c : m_3$ vagy a véle egyenlő $c : a$.

E szerint:

Az RR' hatványpontjaival adott elliptikus involucziónak kapcsolt-képzetes kettőspontjain keresztül menő és egy adott hiperbolához hasonló és hasonló fekvésű hiperboláknak gyújtópontjai szintén egy hiperbolán vannak. Ez utóbbinak középpontja az RR' vonaldarabnak felezőpontja, főtengelye merőleges az RR' egyenesre, gyújtópontjainak távolsága egyenlő RR'-sel, főtengelye pedig oly nagy, mint ama hasonló hiperbolák legkisebbikének melléktengelyén a hatványpontok távolsága.

17. A $d^{(2)}$ és $d_i^{(2)}$ hiperbolák melléktengelyük körül forgatva oly hasonló és hasonló fekvésű $D^{(2)}$ és $D_i^{(2)}$ egyágú forgáshiperboloidokat írnak le, melyek egymást egy $e^{(2)}$ hiperbolában és egy végtelen távol fekvő kúpszeletben metszik. Az $e^{(2)}$-nek ε síkja merőleges a $d^{(2)}$, $d_i^{(2)}$ hiperboláknak δ síkjára, melléktengelye RR' ($2b$) a hiperboloidok forgástengelyével φ szöget képez, főtengelye SS' pedig egyenlő NN'-sel ($2a$-val).

A hiperboloidoknak æquatorai, fokális körei, vezérlő hengereinek metszőkörei az illető æquatorsíkokkal megfelelőleg egy $N^{(2)}$, $H^{(2)}$, $G^{(2)}$ egyágú hiperboloidon vannak. Ezeknek közös átmérőjén az UU' pontok hatványpontok és az ehhez kapcsolt körmetsző átmérősík a $D^{(2)}$ hiperboloidnak æquatorsíkja. A $H^{(2)}$ és $G^{(2)}$ egymásnak poláris alakzata az $N^{(2)}$-re vonatkozólag.

Bármelyik $D_i^{(2)}$ hiperboloid pontjainak távolságai a saját fokális körének egy pontjától és az ahhoz tartozó vezérlő vonaltól (mely utóbbi az $e^{(2)}$-nek síkját az $e^{(2)}$-n kívül metszi) oly viszonyban vannak, mint $\sqrt{a^2+b^2} : \sqrt{a^2+b^2\sin^2\varphi}$.

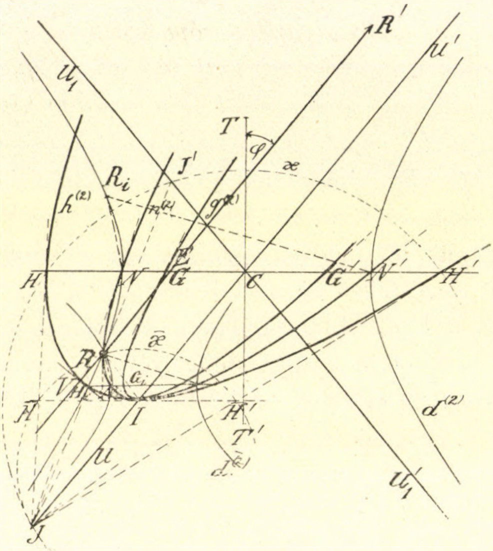
Az $e^{(2)}$ pedig fokális hiperbolája annak az egyágú hiperboloidnak, $H^{(2)}$-nek, mely a $D_i^{(2)}$ hiperboloidoknak fokális köreit tartja.

Fordítva:

«Az $e^{(2)}$ hiperbolán keresztül mindig lehet oly hasonló és hasonló fekvésű egyágú forgáshiperboloidokat vezetni, melyeknek forgástengelyei az $e^{(2)}$-nek melléktengelyével φ szöget képeznek és az $e^{(2)}$ főtengelyére merőlegesek. Ezeknek fokális körei egy oly $H^{(2)}$ egyágú hiperboloidon vannak, a melynek az $e^{(2)}$ a fokális hiperbolája. A φ szög változásával a $H^{(2)}$ leírja az egész egyágú hiperboloidsereget, mely az egész tért betölti.»

Ezért:

Ha adva van az $e^{(2)}$ hiperbola, melynek fő- és melléktengelye $2a$ és $2b$, és egy F pont, akkor mindig lehet annak főtengelyére



9. ábra.

merőleges és a melléktengelyéhez egy bizonyos φ szög alatt hajló oly f egyenest (és annak az $e^{(2)}$ síkjára vonatkozó tükörképét f'-et) találni, hogy a hiperbola pontjainak az F ponttól és az f (és az f') egyenestől mért távolságai

$$\sqrt{a^2+b^2} : \sqrt{a^2+b^2\sin^2\varphi}$$

viszonyban legyenek. Az f (és f') egyenes az $e^{(2)}$ hiperbola síkját a hiperbolán kívül metszi. —

18. Legyen végre (9. ábra) az RR' a $d^{(2)}$ hiperbolának az UU' asimptótájával párhuzamos húrja, a mely a $d^{(2)}$-őt az R véges-

ben és az $R' \equiv U'$ végtelen távol fekvő pontjában metszi. Keressük fel ismét azokat az $n^{(2)}$, $h^{(2)}$ és $g^{(2)}$ görbéket, a melyek az RR' pontokon keresztül menő, az UU' asimptótát érintő és a $d^{(2)}$-vel hasonló és hasonló fekvésű $d_i^{(2)}$ hiperboláknak N_iN_i' csúcsait, H_iH_i' gyújtópontjait, illetve a vezérlő vonalaknak G_iG_i' metszőpontjait az illető főtengelyekkel tartják.

E végből a $d^{(2)}$ hiperbolának azon az ágán, a melyen az R pont van, felveszünk egy R_i pontot, és az R_iNN' háromszöggel hasonló és hasonló fekvésű RN_iN_i' háromszöget szerkesztünk; ennek N_iN_i' szögpontjai, már a kivánt $d_i^{(2)}$ hiperbolának csúcsai. A $d_i^{(2)}$-nek főtengelyén, az N_iN_i' egyenesen vannak a H_iH_i' gyújtópontok és a G_iG_i' pontok.

Ha az R_i a $d^{(2)}$ hiperbola második asimptótájának, U_1U_1'-nek végtelen távol fekvő pontja, akkor a $d_i^{(2)}$ hiperbola elkorcsosul az UIU' és RI asimptótáiba úgy, hogy ezeknek I metszőpontja szintén az $n^{(2)}$-ön van. Ugyancsak az $n^{(2)}$-ön van az R és R' pont is, tehát az $n^{(2)}$ és ugyanígy a vele az UIU' affinitási tengelyre vonatkozólag affin $h^{(2)}$ és $g^{(2)}$ görbék oly parabolák, a melyeknek tengelye párhuzamos az UU' egyenessel, és a görbéknek közös érintője az I pontban párhuzamos az NN' egyenessel.

Az $n^{(2)}$, $h^{(2)}$ és $g^{(2)}$ paraboláknak érintői az NN', HH' és GG' pontokban egymást az UU' asimptótának abban a J pontjában metszik, a mely az I pontra nézve szimmetrikus a C-vel. Ebben a J pontban metszi egyszersmind a $d^{(2)}$ hiperbola R pontjának érintője az UU' asimptótát, mert $RI \parallel U_1U_1'$.

A JHH' háromszög körül írt $\varkappa$ kör keresztül megy azon a J' ponton, a melyben a JR érintő az U_1U_1' asimptótát metszi. Az a $\bar{\varkappa}$ kör pedig, mely a $h^{(2)}$ parabola $HH'I$ pontjainak érintőitől képezett $\overline{HH'J}$ háromszög körül van írva, félakkora átmérővel bír, mint a $\varkappa$ és azzal a J hasonlósági pontra vonatkozólag hasonló fekvésű; a $\bar{\varkappa}$ tehát keresztül megy az R ponton. A $\bar{\varkappa}$ körön van a $h^{(2)}$ parabolának gyújtópontja, és mert a JRH és JRH' szögek egyenlők, azért az R pont a $h^{(2)}$ parabolának gyújtópontja.

Ha a $d^{(2)}$ hiperbola TT' melléktengelyének hajlásszögét az UU' asimptótához φ-vel, a $h^{(2)}$ parabolának csúcsát V-vel, az RR' egyenes és a $d^{(2)}$ hiperbola főtengelyének metszőpontját E-vel jelöljük és ha $CE = r$, akkor $RV = s = \frac{r}{2} \cos\varphi \, . \operatorname{cotg}\varphi$, mert a $h^{(2)}$ parabolának az R gyújtópontjából az I pont érintőjére bocsátott merőlegeseknek talpa a V csúcsnak érintőjében van.

E szerint:

Ha egy R ponton keresztül oly hasonló és hasonló fekvésű hiperbolákat vezetünk, a melyeknek egyik asimptótája az UU' egyenes, és a melyeknek melléktengelyei az UU'-sel φ szöget zárnak be, akkor ezeknek a hiperboláknak gyújtópontjai egy $h^{(2)}$ parabolán vannak. $h^{(2)}$-nek gyújtópontja az R pont, tengelye párhuzamos az UU' asimptótával és V csúcsának távolsága az R gyújtóponttól $s = \frac{r}{2} \cos\varphi \, . \operatorname{cotg}\varphi$, ha r annak a vonaldarabnak a hossza, a melyet az UU' egyenes az R ponton átmenő és a hiperbolák főtengelyeivel párhuzamos egyenesről az R ponttól mérve, lemetsz.

A hiperbolák pontjainak távolságai a saját gyújtópontjuktól és az ahhoz tartozó vezérlő vonaluktól $1 : \sin\varphi$ viszonyban vannak.

19. Forgassuk ismét a $d^{(2)}$ és $d_i^{(2)}$ hiperbolákat melléktengelyük körül. Az ekkép leírt $D^{(2)}$ és $D_i^{(2)}$ egyágú forgáshiperboloidok egymást egy $e^{(2)}$ parabolában metszik. Ennek ε síkja merőleges a $d^{(2)}$, $d_i^{(2)}$ hiperboláknak δ síkjára, csúcsa az R pont és főtengelye RR' a hiperboloidoknak forgástengelyeivel φ szöget képez. A hiperboloidoknak æquatorai, fokális körei és vezérlő hengereinek metszőkörei az illető æquatorsíkokkal megfelelőleg egy-egy $N^{(2)}$, $H^{(2)}$ és $G^{(2)}$ elliptikus paraboloidon vannak. Ezeknek az UU' asimptóta I pontjában közös érintősíkjuk van, a mely a $D_i^{(2)}$ hiperboloidoknak æquatorsíkjaival párhuzamos; ehhez az érintősíkhoz maga az UU' asimptóta a kapcsolt átmérő. A $H^{(2)}$ és $G^{(2)}$ paraboloid egymásnak poláris alakzata az $N^{(2)}$-re vonatkozólag.

Bármelyik $D_i^{(2)}$ hiperboloid pontjainak távolságai a saját fokális körének egy pontjától és az ahhoz tartozó vezérlő vonaltól (mely utóbbi az $e^{(2)}$ parabolának síkját e parabolán belől metszi) oly viszonyban van, mint $1 : \sin\varphi$.

Az $e^{(2)}$ jelenleg szintén fokális parabolája annak a $H^{(2)}$ elliptikus paraboloidnak, a mely a $D_i^{(2)}$ hiperboloidoknak fokális köreit tartja.

Ugyanis, ha az R pont

$$x = RE \,.\, \sin\varphi + r, \quad y = RE \,.\, \cos\varphi$$

koordinátáinak értékét a $d^{(2)}$ hiperbolának

$$\frac{x^2}{c^2\sin^2\varphi} - \frac{y^2}{c^2\cos^2\varphi} = 1$$

egyenletébe helyettesítjük, akkor az RE-re a következő értéket nyerjük

$$RE = \frac{c^2\sin^2\varphi - r^2}{2r\sin\varphi},$$

ha c a $d^{(2)}$ hiperbolának exczentriczitása.

Az $e^{(2)}$ parabola RE abscissájához tartozó ordináták négyzete $c^2\sin^2\varphi - r^2$, míg a $H^{(2)}$ paraboloid második parabolikus főmetszésének, $h_1^{(2)}$-nek, a VE abscissájához tartozó ordináta négyzetre emelve $c^2 - m^2$.

Ha az $e^{(2)}$ parabola gyújtópontjának távolsága az R csúcstól p, és a $h_1^{(2)}$ parabola gyújtópontjának távolsága a V csúcstól q, akkor

$$c^2\sin^2\varphi - r^2 = 4p \cdot \frac{c^2\sin^2\varphi - r^2}{2r\sin\varphi}$$

$$c^2 - m^2 = 4q\left(\frac{c^2\sin^2\varphi - r^2}{2r\sin\varphi} + \frac{r}{2}\cos\varphi \,.\, \operatorname{cotg}\varphi\right).$$

mely egyenletekből

$$p = \frac{r}{2}\sin\varphi, \quad q = \frac{r}{2\sin\varphi} =$$

$$= \frac{r}{2}\cos\varphi \,.\, \operatorname{cotg}\varphi + \frac{r}{2}\sin\varphi = s + p$$

és

$$\sin^2\varphi = \frac{p}{s+p}\cdot$$

A $h_1^{(2)}$ és $e^{(2)}$ paraboláknak tehát közös gyújtópontjuk van; a $h^{(2)}$ parabolának pedig gyújtópontja (R), a mely az $e^{(2)}$-nek csúcsa; tehát tényleg a $H^{(2)}$ elliptikus paraboloidnak fokális parabolája az $e^{(2)}$.

Fordítva:

Az $e^{(2)}$ parabolán keresztül mindig lehet oly hasonló és hasonló fekvésű egyágú forgáshiperboloidokat vezetni, a melyeknek forgástengelyei az $e^{(2)}$-nek tengelyével φ szöget képeznek. Ezeknek a hiperboloidoknak fokális körei egy oly elliptikus paraboloidon, $H^{(2)}$- őn, vannak, a melynek az $e^{(2)}$ egyik fokális parabolája. A φ szög változásával a $H^{(2)}$ az egész fokális elliptikus paraboloid-sereget írja le, mely az egész tért betölti.

Ezért:

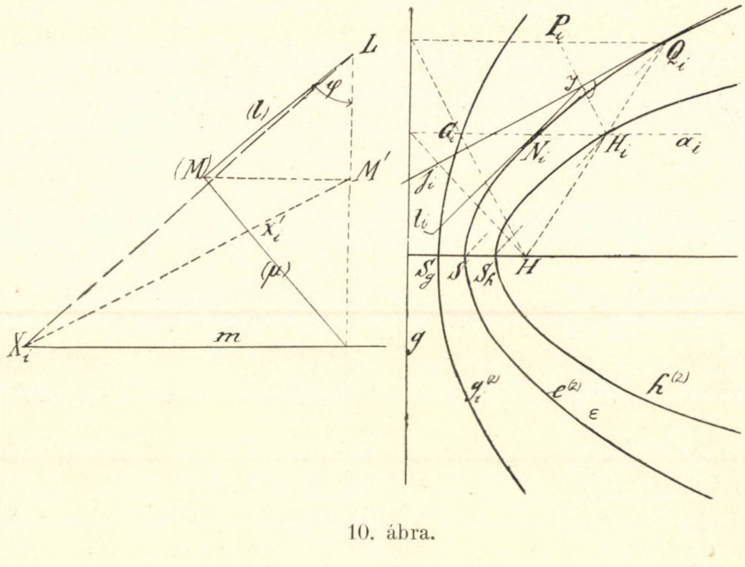
Ha az $e^{(2)}$ parabola és az F pont van adva, akkor mindig lehet az $e^{(2)}$-nek vezérlő vonalára merőleges és tengelyéhez egy bizonyos φ szög alatt hajló oly f egyenest (valamint annak az $e^{(2)}$ síkjára vonatkozó tükörképét f'-et) találni, hogy a parabola pontjainak távolságai az F ponttól és az f (vagy az f') egyenestől $1 : \sin\varphi$ *viszonyban legyenek. Az f (és f') egyenes a parabola síkját a parabolán belől metszi.* —

20. Egészen más eljárást kell követnünk annak az esetnek a tárgyalásakor, a melyben az f egyenes az $e^{(2)}$ parabolának tengelyére merőleges és melléktengelyével, tehát vezérlő vonalával is. φ szöget képez.

Vegyünk fel (10. ábra) az ε síkban egy S csúcscsal biró $e^{(2)}$ parabolát és egy l egyenest, mely utóbbi az $e^{(2)}$-nek tengelyére merőleges, az ε síkhoz φ szög alatt hajlik és e síkot az L pontban metszi. Az $e^{(2)}$-őn keresztül oly $C_i^{(2)}$ hengereket fektetünk, a melyeknek alkotói merőlegesek az l-re, és felkeressük az egyes $C_i^{(2)}$ hengerek fősíkjaiban fekvő n_i csúcsalkotóknak és h_i fokális egyeneseknek geometriai helyét, $N^{(2)}$-őt és $H^{(2)}$-őt.

A $C_i^{(2)}$ hengereknek fősíkjai merőlegesek az l-re és csúcsalkotóinak érintősíkjai párhuzamosak az l-lel. Ha tehát a μ sík az l-re az M pontban merőlegesen áll, és az (M, μ) sugársornak egy változó x_i sugara az ε síkot az X_i pontban metszi, akkor az x_i-vel párhuzamos alkotóval biró $C_i^{(2)}$ hengernek $[n_i t_i]$ érintősíkja az n_i csúcsalkotójában párhuzamos az $[l x_i]$ síkkal, és így az n_i az $e^{(2)}$ parabolát abban az N_i pontban metszi, a melynek t_i érintője párhuzamos az LX_i egyenessel.

Az (L, ε) sorban levő LX_i sugarak, az $e^{(2)}$ parabolának végtelen távol levő érintőjét az (L, ε)-mal projektiv pontsorban



10. ábra.

metszik, és e pontsor pontjain keresztül menő parabolaérintők az $e^{(2)}$-őt az (L, ε)-mal szintén projektiv N_i pontsorban érintik; végre az (L, ε)-mal projektiv (M, μ) sugársor x_i sugarai a μ síknak végtelen távol fekvő m_∞ egyenesét az (L, ε)-mal szintén projektiv pontsorban, M_i-ben metszi. Az $n_i \equiv N_i M_i$ egyenes tehát képződménye az $e^{(2)}$-őn levő N_i pontsornak és az m_∞ egyenesen levő és amazzal projektiv M_i pontsornak. Minthogy pedig az m_∞ egyenes az $e^{(2)}$ parabolát a végtelen távol fekvő pontjában *metszi*, a mely metszőpont az N_i és M_i projektiv sorokban megfelelő, azért ama képződmény egy parabolikus sugársereg. Így tehát:

Valamely $e^{(2)}$ parabolán keresztül menő és annak tengelyére merőleges l egyenesre merőleges alkotókkal biró hengereknek n_i csúcsalkotói, egy $N_i^{(2)}$ hiperbolikus paraboloidnak egyik sugárseregét képezik.

21. A $C_i^{(2)}$ parabolikus hengernek $[n_i a_i]$ fősíkja az $e^{(2)}$-nek N_i pontján keresztül menő a_i átmérőt az n_i csúcsalkotóval köti össze. Ha a $C_i^{(2)}$-nek egy változó érintősíkját metszéshez hozzuk a csúcsalkotónak $[n_i t_i]$ érintősíkjával és e metszővonalon keresztül az illető változó érintősikra merőleges síkokat állítunk, akkor ezek egymást, valamint az $[n_i a_i]$ fősíkot a hengernek h_i fokális egyenesében metszik. E változó érintősíkok között van egy, a mely merőleges az $e^{(2)}$ parabolának ε síkjára, és párhuzamos az x_i egyenest az ε síkra derékszög alatt projicziáló síkkal. Ha tehát az x_i-nek az ε síkra való derékszögű projekcziójával, x_i'-vel, párhuzamos j_i érintőt vezetünk az $e^{(2)}$-höz, akkor ennek Q_i érintőpontján keresztül menő és az x_i-vel párhuzamos q_i alkotó már olyan, hogy a $C_i^{(2)}$-hez tartozó érintősíkja merőleges az ε-ra. A $(t_i, j_i)\equiv J$ pontban a j_i érintőre merőlegesen álló egyenes az ε síkban már az a_i átmérőt abban a H_i pontban metszi, a mely a $C_i^{(2)}$ henger h_i fokális egyenesének metszőpontja az ε síkkal, mert a $[h_i J]$ sík merőleges a $[q_i J]$ érintősíkra és keresztül megy ennek és az $[n_i t_i]$ csúcsérintősíknak metszővonalán.

A J pontnak az $e^{(2)}$ parabolára vonatkozó polárisa az $N_i Q_i$ egyenes, tehát a J pont egyenlő távolságra van az N_i és a Q_i ponton keresztül menő parabolaátmérőktől. Ezért ez utóbbi átmérőn van a H_i pontnak P_i tükörképe a j_i érintőre vonatkozólag, és a $Q_i H_i$ egyenes keresztül megy az $e^{(2)}$-nek H gyújtópontján; végre a P_i pont a C_i^2 hengernek vezérlő síkjában van.

A HQ_i és HH_i vonaldarabok viszonya olyan, mint azoké a vonaldaraboké, a melyet a H pontból a j_i-re és a t_i-re, tehát egyszersmind az ezekkel párhuzamos LX_i és x_i' egyenesekre bocsátott merőlegesek, az $e^{(2)}$ parabolának g vezérlő vonaláról a tengelytől mérve lemetszenek. De mert az X_i pont az l-re merőleges μ síknak az ε síkon levő m nyomában van, azért ama vonaldarabok egyszersmind oly viszonyban is állanak, mint az L pontnak távolsága az m-től, és az M pont derékszögű projekcziójának az ε síkon távolsága az m-től. Ez utóbbiak távolsága az $1 : \cos^2\varphi$ viszonyban van, tehát

$$\frac{HQ_i}{HH_i} = \frac{1}{\cos^2\varphi}$$

és ugyanily viszonyban van a Q_i és P_i pontoknak távolsága az $e^{(2)}$ parabolának g vezérlő vonalától.

Ha tehát a Q_i pont leírja az $e^{(2)}$ parabolát, akkor a H_i pont az $e^{(2)}$-vel a H gyújtópontra, mint hasonlósági pontra vonatkozólag hasonló $h^{(2)}$ parabolát és a P_i pont az $e^{(2)}$-vel a g vezérlő vonalra, mint affinitási tengelyre és az $e^{(2)}$-nek tengelyével párhuzamos affinitási sugarakra vonatkozólag affin parabolát $p^{(2)}$-őt írja le.

Az $e^{(2)}$ és $h^{(2)}$ parabolák hasonló fekvésük miatt konfokálisak, a $p^{(2)}$ és $h^{(2)}$ parabolák pedig egymásnak poláris alakzatai az $e^{(2)}$ parabolára vonatkozólag, mert a P_i pontnak polárisa az $e^{(2)}$-re nézve, párhuzamos a Q_i pontnak j_i érintőjével és a H_i ponton megy keresztül, tehát érintője a $h^{(2)}$-nek a H_i pontban. Ép így a H_i pontnak polárisa az $e^{(2)}$-re nézve a P_i ponton megy keresztül és párhuzamos az N_i pontnak t_i érintőjével.

Minthogy az N_i és H_i pontok sora az $e^{(2)}$ és $h^{(2)}$ parabolákon projektivek, a $C_i^{(2)}$ hengereknek n_i csúcsalkotói és h_i fokális egyenesei pedig egymással párhuzamosak, és az n_i csúcsalkotók egy $N_i^{(2)}$ hiperbolikus paraboloidon vannak, azért a h_i fokális egyenesek is egy $H_i^{(2)}$ hiperbolikus paraboloidon vannak. De mert a h_i fokális egyeneseknek derékszögű projekcziói az ε síkra a $h^{(2)}$ parabolának érintői, azért a $h^{(2)}$ egyik főmetszése a $H_i^{(2)}$ hiperbolikus paraboloidnak. Ennek S_h csúcsán keresztül menő csúcsalkotók $(90^\circ - \varphi)$ szög alatt hajlanak az ε fősíkhoz és a mellett

$$S_hH = SH\cos^2\varphi, \quad SS_h + S_hH = SH,$$

tehát

$$\frac{SS_h}{S_hH} = \mathrm{tang}^2\varphi,$$

azaz: a $H_i^{(2)}$ hiperbolikus paraboloidnak második főmetszésének gyújtópontja az $e^{(2)}$ parabolának S csúcsa.*

Ebből következik:

«Ha egy $e^{(2)}$ parabolán oly $C_i^{(2)}$ hengereket vezetünk keresztül, a melyeknek alkotói merőlegesen állanak a parabola tengelyére merőleges és annak síkjához φ szög alatt hajló egyenesre, akkor e hengereknek h_i fokális egyenesei egy hiperbolikus paraboloidon, $H_i^{(2)}$-ön, vannak. Ennek az egyik fokális parabolája az $e^{(2)}$, az S_h csúcsa pedig az $e^{(2)}$-nek S csúcsa és H gyújtópontja között levő vonaldarabot úgy osztja, hogy

$$S_hH\,\mathrm{tang}^2\varphi = SS_h.$$

A φ szög változásával a $H_i^{(2)}$ leírja az egész fokális hiperbolikus paraboloidsereget, mely betölti az egész tért.

Bármelyik $C_i^{(2)}$ hengernek pontjai a h_i fokális egyenesének egy F pontjától és az ehhez tartozó f vezérlő vonaltól (azaz az F ponton keresztül menő normális metszésének vezérlő vonalától), egyenlő távolságra vannak.»

Ezért:

Ha az $e^{(2)}$ parabola és valamely F pont van adva, akkor mindig lehet az $e^{(2)}$-nek tengelyére merőleges és a vezérlő vonalához egy bizonyos φ szög alatt hajló oly f egyenest (valamint annak az $e^{(2)}$ síkjára vonatkozó tükörképét f'-et) találni, hogy a parabola pontjai az F ponttól és az f (vagy az f') egyenestől egyenlő távolságra legyenek. Az f (és f') egyenes a parabola síkját a parabolán kívül metszi.

Az előbbi $C_i^{(2)}$ hengereknek fősíkjai az illető vezérlő síkokat oly g_i egyenesekben metszik, a melyek szintén egy $G_i^{(2)}$ hiperbolikus paraboloidon vannak. Ugyanis minden ilyen g_i egyenes az $e^{(2)}$-nek síkját az illető $N_iH_i \equiv a_i$ átmérőnek abban a G_i pontjában metszi, a mely az N_i-től ép oly távolságra van, mint a H_i pont. A G_i pontok tehát egy $g_i^{(2)}$ parabolán és a g_i egyenesek egy $G_i^{(2)}$ hiperbolikus paraboloidon vannak. A $G_i^{(2)}$ és $H_i^{(2)}$ hiper-

---

* Klug: *Projektiv Geometria* (1903); 145. old.

bolikus paraboloidok, úgy mint az előbbi esetekben az illető $G_i^{(2)}$ és $H_i^{(2)}$ felületek, szintén poláris alakzatai egymásnak az $N_i^{(2)}$-re vonatkozólag, mert minden $C_i^{(2)}$ hengernek fősikja ama felületeket a g_i, h_i és n_i párhuzamos egyenesekben metszi, és a h_i minden pontjának poláris síkja az $N_i^{(2)}$-re vonatkozólag a g_i-n megy keresztül és érinti a $G_i^{(2)}$-öt.

*

22. Ezeknek előre bocsátása után lássuk az egyes szerkesztéseket.

Vegyük fel e végből először az ε síkban az $e^{(2)}$ ellipsist, a melynek fő- és melléktengelye $2a$ és $2b$, exczentriczitása c. Vegyünk fel továbbá egy az $e^{(2)}$-nek főtengelyére merőleges és a melléktengelyéhez φ szög alatt hajló f egyenest, a mely az ε síkot az $e^{(2)}$ görbén kívül metszi, és szerkeszszük meg ezekből az adatokból az

$$m = \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2\varphi} = \sqrt{c^2 + b^2 \cos^2\varphi}$$

vonaldarabot. Ha ezután az $e^{(2)}$ ellipsis pontjainak távolságait az f egyenestől az $m : c$ viszony szerint kisebbitjük, és a kisebbitett vonaldarabokkal ama ellipsispontokból gömböket írunk le, úgy ezek egymást (a 10. és 11. pont szerint) egy valós vagy képzetes FF' pontpárban metszik. A F (valamint az F') pontnak és az f egyenesnek tehát az $e^{(2)}$ irányában az a tulajdonsága, hogy az $e^{(2)}$ pontjainak távolságai az F-től és az f-től a $c : m (<1)$ viszonyban vannak. —

Ha azonban az f egyenes az $e^{(2)}$-nek melléktengelyére merőleges és a főtengelyhez hajlik oly φ szög alatt, hogy $\sin\varphi > \frac{b}{a}$, és az ε síkot az $e^{(2)}$ ellipsisen belül metszi, ha továbbá

$$m_1 = \sqrt{a^2 \sin^2\varphi - b^2},$$

akkor az $e^{(2)}$ pontjainak távolságait az f egyenestől az $m_1 : c$ viszony szerint nagyobbitjuk és a nagyobbitott vonaldarabokkal írunk le ama ellipsispontokból gömböket. Ezek egymást (a 12. és 13. pont szerint) szintén egy FF' valós vagy képzetes pontpárban metszik és az F (valamint az F') pontnak és az f egyenesnek ismét az a tulajdonsága, hogy az $e^{(2)}$ pontjainak távolságai az F ponttól és az f egyenestől $c:m_1(>1)$ viszonyban vannak. —

Vegyünk fel másodszor az ε síkban egy $e^{(2)}$ *hiperbolát*, a melynek főtengelye $2a$, a félmelléktengelyének négyzete $-b^2$ és exczentriczitása c. Vegyünk fel továbbá egy f egyenest, a mely az $e^{(2)}$ főtengelyére merőleges, a melléktengelyhez pedig φ szög alatt hajlik és az ε síkot az $e^{(2)}$ hiperbolán kivül metszi, és szerkeszszük meg ezekből az adatokból az

$$m_3 = \sqrt{a^2+b^2\sin^2\varphi}$$

vonaldarabot. Ha az $e^{(2)}$ pontjainak távolságait az f egyenestől az $m_3:c$ viszony szerint kisebbítjük, akkor a kisebbített vonaldarabokkal az illető hiperbolapontokból leirt gömbök egymást (a 16. és 17. pont szerint) az FF' pontpárban metszik. A F (valamint az F') pontnak és az f egyenesnek tulajdonsága, hogy az $e^{(2)}$ pontjainak távolságai az F-től és az f-től a $c:m_3\,(<1)$ viszonyban vannak.

Ha azonban az f egyenes az $e^{(2)}$-nek melléktengelyére merőleges és a főtengelyéhez hajlik φ szög alatt és az ε síkot az $e^{(2)}$-őn belől metszi, ha továbbá

$$m_2 = \sqrt{a^2\sin^2\varphi+b^2},$$

akkor az $e^{(2)}$ pontjainak távolságait az $m_2:c$ viszony szerint kell kisebbítenünk és a kisebbített vonaldarabokkal az illető hiperbolapontokból gömböket leirni. E gömbök egymást (a 14. és 15. pont szerint) az FF' pontpárban metszik és az $e^{(2)}$ pontjainak távolságai az F (valamint az F') ponttól és az f egyenestől a $c:m_2\,(<1)$ viszonyban vannak. —

Vegyünk fel harmadszor az ε síkban egy $e^{(2)}$ *parabolát*, továbbá annak főtengelyére merőleges és annak síkjához tetszésszerinti szög alatt hajló f egyenest, a mely az ε síkot az $e^{(2)}$ parabolán kivül metszi. Ha a parabola pontjaiból gömböket írunk le, a melyeknek radiusa az illető pontoknak távolsága az f-től, azaz, a melyek f-et érintik, akkor ezek egymást (a 20. és 21. pont szerint) egy FF' pontpárban metszik. Az $e^{(2)}$ parabola pontjainak távolságai az F és F' ponttól és az f egyenestől egyenlő. Ha azonban az f egyenes a parabolának főtengelyéhez φ szög alatt hajlik és a vezérlő vonalára merőleges, és az ε síkot a parabolán belől metszi, akkor a parabola pontjainak távolságait az f-től az $1 : \sin\varphi$ viszony szerint kisebbítenünk kell. A kisebbített vonaldarabokkal az illető parabolapontokból leírt gömbök egymást (a 18. és 19. pont szerint) az FF' pontpárban metszik. A parabola pontjainak távolságai az F (valamint az F') pontból és az f egyenestől oly viszonyban vannak, a melynek értéke $\sin\varphi$.

Mindezekből azt látjuk, hogy:

Ezek a szerkesztések, a melyeknek segélyével az f egyenesből az F pontot úgy határozzuk meg, hogy egy adott $e^{(2)}$ kúpszelet pontjainak távolságai az F-től és az f-től állandó viszonyban legyenek, mindannyian másodfokúak.

22*a*. Az F pontra vonatkozólag mind a három, illetve hat esetben megadhatunk egy geometriai helyet, a melyen az F pont rajta van. Ugyanis:

Legyen az f egyenes akár a sferoid, akár az egyágú hiperboloid vagy a forgásfelületnek képzelt parabolikus henger egyik $d^{(2)}$ meridiánjának vezérlő vonala, az F pont pedig az f-hez tartozó gyújtópontja. Az f egyenesnek f_1 polárisa ama forgásfelületekre vonatkozólag keresztül megy az F ponton és merőleges a $d^{(2)}$-nek síkjára. E mellett az f egyenes bármely P pontjának π polársíkja merőleges a PF egyenesre az F pontban.

Ha tehát valamely ε sík ama forgásfelületek egyikét az $e^{(2)}$ kúpszeletben az f egyenest a P pontban metszi, akkor a P pontnak poláris síkja π, a P-nek az $e^{(2)}$-re vonatkozó p polárisán megy keresztül és az F pont azon $\varkappa$ körön van, a melyet a P pontból a p síksor síkjaira bocsátott merőlegeseknek talppontjai képeznek.

Ebből következik:

Ha az $e^{(2)}$ kúpszelet pontjainak távolságai az f egyenestől és az F ponttól állandó viszonyban vannak és az f-nek és az $e^{(2)}$ síkjának P metszőpontjából a P polárisára, p-re, bocsátott merőlegesnek talppontja a Q, akkor az F pont azon a $\varkappa$ körön van, a melynek egyik átmérője PQ és a melynek síkja a p-re merőlegesen áll. —

23. Vegyük fel ismét az ε síkban az $e^{(2)}$ kúpszeletet, és bárhol az F pontot; határozzuk meg ezekből az adatokból az f egyenest úgy, hogy az $e^{(2)}$ pontjainak távolságai az F-től és az f-től állandó viszonyban legyenek.

Legyen először az $e^{(2)}$ egy *ellipsis*, a melynek fő- és melléktengelye $2a$ és $2b$, exczentriczitása pedig c.

Az F ponton azt az egyágú hiperboloidot vezetjük keresztül, a melynek fokális ellipsise az $e^{(2)}$.

Ha e hiperboloidnak az ε fősíkjára merőleges tengelyén a hatványpontok távolsága $2\mathfrak{b}$, és ha

$$\mathfrak{c}^2 = a^2 - \mathfrak{b}^2, \quad \cos\varphi = \frac{\mathfrak{b}}{b} \cdot \frac{c}{\mathfrak{c}},$$

akkor e hiperboloid mindazoknak az $e^{(2)}$-n keresztül menő hasonló és hasonló fekvésű $D_i^{(2)}$ sféroidoknak fokális köreit tartja, a melyeknek forgástengelyei az $e^{(2)}$-nek síkjával és melléktengelyével φ szöget képeznek (10. és 11. pont). S minthogy a $D_i^{(2)}$ sféroidok meridiánjai fő- és melléktengelyeinek viszonya $a:\mathfrak{b}$, azért bármelyik $D_i^{(2)}$ sféroid pontjainak távolságai, és így az $e^{(2)}$ ellipsis pontjainak távolságai is, a $D_i^{(2)}$ sféroidok fokális köreinek egy pontjától és az ahhoz tartozó vezérlő vonaltól $\mathfrak{c}:a$ viszonyban vannak.

Ha tehát az $e^{(2)}$ ellipsis pontjainak távolságait az adott F ponttól a $\mathfrak{c}:a$ viszony szerint nagyobbítjuk, és a nagyobbított vonaldarabokkal az illető pontokból gömböket írunk le, úgy e gömböknek közös f és f' érintői a keresett f egyenesek. Két-két gömb, a melynek középpontja az $e^{(2)}$-nek melléktengelyére nézve szimmetrikus egymást egy körben metszi, és mindezen körök az $e^{(2)}$-nek főtengelyére merőleges síkban vannak, és közös érintőjük az $e^{(2)}$-nek melléktengelyéhez φ szög alatt hajló f és f' egyenes. E körök segélyével tehát az f és f' egyenesek, a melyek az $e^{(2)}$-nek síkját az $e^{(2)}$ ellipsisen kívül metszik, szerkeszthetők.

24. Vezessük ezután az F ponton keresztül azt az ellipsoidot, a melyeknek fokális ellipsise az $e^{(2)}$.

Ha az ellipsoidnak az ε fősíkjára merőleges tengelye $2\mathfrak{a}$, és ha

$$\mathfrak{c}^2 = a^2 + b^2, \quad \cos\varphi = \frac{\mathfrak{a}}{a} \cdot \frac{c}{\mathfrak{c}},$$

akkor az ellipsoid mindazoknak az $e^{(2)}$-n keresztül menő hasonló és hasonló fekvésű $D_i^{(2)}$ egyágú forgáshiperboloidoknak fokális köreit tartja, a melyeknek forgástengelyei az $e^{(2)}$-nek síkjával és főtengelyével φ szöget képeznek (12. és 13. pont). A $D_i^{(2)}$ hiperboloidok pontjainak távolságai, és így az $e^{(2)}$ ellipsis pontjainak távolságai is, bármelyik $D_i^{(2)}$ fokális körének egy pontjától és az ahhoz tartozó vezérlő vonaltól $\mathfrak{c} : b$ viszonyban vannak.

Ha tehát az $e^{(2)}$ ellipsis pontjainak távolságait az F ponttól a $\mathfrak{c} : b$ viszony szerint kisebbítjük és a kisebbített vonaldarabokkal az illető ellipsispontokból gömböket írunk le, úgy ezeknek közös f és f' érintői a keresett f egyenesek. Két-két gömb, a melynek középpontja az $e^{(2)}$-nek főtengelyére szimmetrikus egymást egy körben metszi, és mindezen körök az $e^{(2)}$-nek melléktengelyére merőleges síkban vannak, és közös érintőjük az $e^{(2)}$-nek főtengelyéhez φ szög alatt hajló f és f' egyenesek. E körök segélyével tehát az f és f' egyenesek, a melyek az $e^{(2)}$-nek síkját az $e^{(2)}$ ellipsisen belől metszik, szerkeszthetők. —

25. Legyen másodszor az ε síkban az $e^{(2)}$ kúpszelet *hiperbola*, a melynek főtengelye $2a$, melléktengelyén a hatványpontok távolsága $2b$, exczentriczitása pedig c.

Az F ponton azt az egyágú hiperboloidot vezetjük keresztül, a melynek fokális hiperbolája az $e^{(2)}$.

Ha e hiperboloidoknak az ε fősíkjára merőleges tengelyén a hatványpontok távolsága $2\mathfrak{b}$, és ha

$$\mathfrak{c}^2 = a^2 + \mathfrak{b}^2, \quad \cos\varphi = \frac{\mathfrak{b}}{b} \cdot \frac{c}{\mathfrak{c}},$$

akkor a hiperboloid mindazoknak az $e^{(2)}$-ön keresztül menő hasonló és hasonló fekvésű $D_i^{(2)}$ egyágú forgáshiperboloidoknak fokális köreit tartja, a melyeknek forgástengelyei az $e^{(2)}$-nek síkjával és melléktengelyével φ szöget képeznek (16. és 17. pont). E $D_i^{(2)}$ hiperboloidok pontjainak távolságai, és így az $e^{(2)}$ hiperbola pontjainak távolságai is, bármelyik $D_i^{(2)}$ fokális körének egy pontjától és ahhoz tartozó vezérlő vonaltól $\mathfrak{c} : a$ viszonyban vannak.

Ha tehát az $e^{(2)}$ hiperbola pontjainak távolságait az F ponttól a $\mathfrak{c} : a$ viszony szerint kisebbítjük, és e kisebbített vonaldarabokkal az illető hiperbolapontokból gömböket írunk le, úgy ezeknek közös f és f' érintői a keresett f egyenesek. Két-két gömb, a melynek középpontja az $e^{(2)}$-nek melléktengelyére nézve szimmetrikus egymást egy körben metszi, és mindezen körök az $e^{(2)}$-nek főtengelyére merőleges síkban vannak, és közös érintőjük az $e^{(2)}$-nek melléktengelyéhez φ szög alatt hajló f és f' egyenes. E körök segélyével tehát az f és f' egyenesek, a melyek az $e^{(2)}$-nek síkját az $e^{(2)}$ hiperbolán kívül metszik, szerkeszthetők.

26. Vezessük ezután az F ponton keresztül azt a kétágú hiperboloidot, a melynek fokális hiperbolája az $e^{(2)}$.

Ha e hiperboloidnak az ε fősíkjára merőleges tengelyén a hatványpontok $2\mathfrak{a}$ távolságra vannak, és ha

$$\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{a}^2 + b^2, \quad \cos\varphi = \frac{\mathfrak{a}}{a} \cdot \frac{c}{\mathfrak{c}},$$

akkor e kétágú hiperboloid mindazoknak az $e^{(2)}$-n keresztül menő hasonló és hasonló fekvésű $D_i^{(2)}$ egyágú forgáshiperboloidoknak fokális köreit tartja, a melyeknek forgástengelyei az $e^{(2)}$-nek síkjával és főtengelyével φ szöget képeznek (14. és 15. pont). A $D_i^{(2)}$ hiperboloidok pontjainak távolságai, és így az $e^{(2)}$ hiperbola pontjainak távolságai is, bármelyik $D_i^{(2)}$ fokális körének egy pontjától és az ahhoz tartozó vezérlő vonaltól $\mathfrak{c} : b$ viszonyban vannak.

Ha tehát az $e^{(2)}$ hiperbola pontjainak távolságait a $\mathfrak{c} : b$ viszony szerint kisebbítjük, és a kisebbített vonaldarabokkal az illető hiperbolapontokból gömböket írunk le, úgy ezeknek közös f és f' érintői a keresett f egyenesek. Két-két gömb, a melynek középpontja az $e^{(2)}$-nek főtengelyére szimmetrikus egymást egy körben metszi, és mindezen körök az $e^{(2)}$-nek melléktengelyére merőleges síkban vannak, és közös érintőjük az $e^{(2)}$ főtengelyéhez φ szög alatt hajló f és f' egyenesek. E körök segélyével tehát az f és f' egyenesek, a melyek az $e^{(2)}$-nek síkját az $e^{(2)}$ hiperbolán belől metszik, szerkeszthetők. —

27. Legyen végre harmadszor az ε síkban az $e^{(2)}$ kúpszelet *parabola*, a melynek gyújtópontja a csúcstól p távolságra van. Az F ponton azt az elliptikus paraboloidot vezetjük keresztül, a melynek fokális parabolája az $e^{(2)}$, és mely ezt a parabolát bezárja.

Ha e paraboloidnak csúcsa az $e^{(2)}$-nek csúcsától s távolságra van, és

$$\sin^2\varphi = \frac{p}{p+s},$$

akkor a paraboloid, mindazoknak az $e^{(2)}$-őn keresztül menő hasonló és hasonló fekvésű $D_i^{(2)}$ egyágú forgáshiperboloidoknak fokális köreit tartja, a melyeknek forgástengelyei az $e^{(2)}$-nek síkjával és tengelyével φ szöget képeznek (18. és 19. pont). A $D_i^{(2)}$ hiperboloidok pontjainak távolságai, és így az $e^{(2)}$ parabola pontjainak távolságai is, bármelyik $D_i^{(2)}$ fokális körének egy pontjától és az ahhoz tartozó vezérlő vonaltól $1 : \sin\varphi$ viszonyban vannak.

Ha tehát az $e^{(2)}$ parabola pontjainak távolságait az F ponttól az $\sqrt{s+p} : \sqrt{p}$ viszony szerint kisebbítjük, és a kisebbitett vonaldarabokkal az illető parabolapontokból gömböket írunk le, úgy ezeknek közös f és f' érintői a keresett f egyenesek. Két-két gömb, a melynek középpontja az $e^{(2)}$ tengelyére nézve szimmetrikus egymást egy körben metszi, és mindezen körök az $e^{(2)}$-nek vezérlő vonalára merőleges síkban vannak, és közös érintőjük az $e^{(2)}$ tengelyéhez φ szög alatt hajló f és f' egyenesek. E körök segélyével tehát az f és f' egyenesek, a melyek az $e^{(2)}$ síkját az $e^{(2)}$ parabolán belől metszik, szerkeszthetők.

28. Vezessük végre az F ponton keresztül azt a hiperbolikus paraboloidot, a melynek fokális parabolája az $e^{(2)}$.

Ha ennek csúcsa az $e^{(2)}$-nek csúcsától s távolságra van, és

$$\sin^2\varphi = \frac{p-s}{p},$$

akkor a hiperbolikus paraboloid tartója azoknak az $e^{(2)}$ keresztül menő $D_i^{(2)}$ hengerek fokális egyeneseinek, a melyeknek alkotói az $e^{(2)}$ parabola síkjához φ alatt hajló és $e^{(2)}$-nek tengelyével párhuzamos síkhoz párhuzamosak (20. és 21. pont). Bármelyik $D_i^{(2)}$ henger pontjai, tehát egyszersmind az $e^{(2)}$ parabolának pontjai is, bármelyik $D_i^{(2)}$ fokális egyenesének egy pontjától és az ahhoz tartozó vezérlő vonaltól egyenlő távolságra vannak. Ha tehát az $e^{(2)}$ parabolának pontjaiból az F ponton keresztül gömböket írunk le, úgy ezeknek közös f és f' érintői a keresett f egyenesek. Ha e gömbökhez megszerkesztjük azokat az érintőhengereket, a melyeknek alkotói az $e^{(2)}$-nek síkjához és vezérlő vonalához φ szög alatt hajlanak, akkor e hengereknek közös f és f' alkotói a keresett f egyenesek. Ezek az f és f' egyenesek a parabola síkjára vonatkozólag szimmetrikusak és e síkot a parabolán kívül metszik. —

29. A 23—28. alatti szerkesztések a következő feladat megoldásának ismeretét kívánták:

Az F ponton keresztül oly másoorendű felületet vezetni, a melynek egy adott $e^{(2)}$ kúpszelet fokális kúpszelete.

Az F ponton három II. r. felület $F_1^{(2)}$, $F_2^{(2)}$, $F_3^{(2)}$ megy keresztül, a melynek az $e^{(2)}$ fokális kúpszelete; és pedig: ha az $e^{(2)}$ ellipsis vagy hiperbola, akkor a három felület ellipsoid $F_1^{(2)}$, kétágú hiperboloid $F_2^{(2)}$, és egyágú hiperboloid $F_3^{(2)}$; ha pedig az $e^{(2)}$ parabola, akkor a három felület közül kettő $F_1^{(2)}$ és $F_2^{(2)}$ elliptikus paraboloid, a harmadik $F_3^{(2)}$ hiperbolikus paraboloid.

E három felületnek normálisai az F pontban xyz tengelyei annak a II. r. $F.e^{(2)}$ kúpnak, a mely az $e^{(2)}$ kúpszeletet az F pontból projicziálja, valamint tengelyei annak az $F.e_1^{(2)}$ II. r. kúpnak is, a mely az $e^{(2)}$-nek fokális kúpszeletét, $e_1^{(2)}$-őt, az F

pontból projicziálja. És pedig: ha az $e^{(2)}$ ellipsis, tehát az $e_1^{(2)}$ hiperbola, akkor az $F.e^{(2)}$ kúpnak x elliptikus tengelye az $F_1^{(2)}$ ellipsoidnak normálisa; az $F.e_1^{(2)}$ kúpnak y elliptikus tengelye az $F_2^{(2)}$ kétágú hiperboloidnak normálisa, végre a z tengely az $F_3^{(2)}$ egyágú hiperboloidnak normálisa. Ha pedig az $e^{(2)}$ és $e_1^{(2)}$ fokális parabolák, akkor az $F.e^{(2)}$, $F.e_1^{(2)}$ kúpoknak x, y elliptikus tengelyei a két elliptikus paraboloidnak, $F_1^{(2)}$- és $F_2^{(2)}$-nek normálisai, a z tengely pedig az $F_3^{(2)}$ hiperbolikus paraboloidnak normálisa.

Minthogy az xyz tengelynek nyomai az $e^{(2)}$-nek és $e_1^{(2)}$-nek síkján, szögpontjai e kúpszeletek poláris háromszögeinek, azért az első esetben az x tengely, a mely az $e^{(2)}$ ellipsisnek síkját az $e^{(2)}$-n belől metszi, normálisa az $e^{(2)}$-t magába záró $F_1^{(2)}$ ellipsoidnak; az y tengely, a mely az $e_1^{(2)}$ hiperbola síkját az $e_1^{(2)}$-n belől metszi, normálisa az $e_1^{(2)}$-t magába záró $F_2^{(2)}$ kétágú hiperboloidnak. A második esetben pedig az x tengely, a mely az $e^{(2)}$ parabolának síkját az $e^{(2)}$-n belől metszi, normálisa az $e^{(2)}$-t magába záró $F_1^{(2)}$ elliptikus paraboloidnak; az y tengely, a mely az $e^{(2)}$ parabolának síkját az $e_1^{(2)}$-n belől metszi, tengelye az $e_1^{(2)}$-t magába záró $F_2^{(2)}$ elliptikus paraboloidnak.

Miután ezek szerint megállapitottuk, hogy az xyz normálisok közül melyik tartozik az $F_1^{(2)}F_2^{(2)}F_3^{(2)}$ felülethez, lássuk, hogy mikép szerkeszthetők e felületek $e^{(2)}$ és $e_1^{(2)}$ fokális kúpszeleteinek síkjára merőleges tengelyei, illetve az $e^{(2)}$-nek tengelyén levő csúcsai, mert ezeknek ismeretét kivánják a 23—28. alatti szerkesztések.

30. Jelöljük az $e^{(2)}$ ellipsisnek és $e_1^{(2)}$ fokális hiperbolájának közös középpontját C-vel, amannak és ennek főtengelyén levő csúcsait SS'-sel és S_1S_1'-gyel; az F pontból az SS'-re bocsátott μ merőleges síknak és az $[yz]$, $[zx]$, $[xy]$ síkoknak metszőpontjait az SS' tengelylyel M, M_1, M_2 és M_3-mal.

Az $[yz]$, $[zx]$, $[xy]$ síkok érintősíkjai az $F_1^{(2)}$, illetve $F_2^{(2)}$, $F_3^{(2)}$ felüleleteknek az F pontban, tehát a μ sík poláris síkja az M_1, M_2, M_3 pontnak, és így az MM_1, MM_2, MM_3 pontpár kapcsolt póluspár az $F_1^{(2)}$, illetve $F_2^{(2)}$, $F_3^{(2)}$ felületre vonatkozólag.

Az SS' csúcsok gyújtópontjai az $F_1^{(2)} F_2^{(2)} F_3^{(2)}$ felületek azon főmetszéseinek, a melyeknek síkja az $e^{(2)}$ síkjára merőleges és az SS' egyenesen megy keresztül; az $S_1 S_1'$ csúcsok pedig gyújtópontjai ama felületek azon főmetszéseinek, a melyeknek síkja az $e_1^{(2)}$ síkjára merőleges és szintén az SS'-ön megy keresztül. Ezért: az $F_3^{(2)}$ egyágú hiperboloidnak (23.) az $e^{(2)}$ ellipsis síkjára merőleges tengelyén a hatványpontok távolsága

$$2\mathfrak{b} = \sqrt{CM.CM_3 + \overline{CS}^2},$$

az $F_1^{(2)}$ ellipsoidnak (24.) az $e^{(2)}$ ellipsis síkjára merőleges tengelye

$$2\mathfrak{a} = \sqrt{CM.CM_1 - \overline{CS}^2},$$

az $F_3^{(2)}$ egyágú hiperboloidnak (26.) az $e^{(2)}$ hiperbola síkjára merőleges tengelye

$$2\mathfrak{b} = \sqrt{CM.CM_3 - \overline{CS}^2},$$

végre az $F_2^{(2)}$ kétágú hiperboloidnak (25.) az $e_1^{(2)}$ hiperbola síkjára merőleges tengelyén a hatványpontok távolsága

$$2\mathfrak{a} = \sqrt{CM.CM_2 + \overline{CS}^2}.$$

E vonaldarabok ismeretével tehát a 23—26. alatt levő viszonyok és φ szögek szerkeszthetők. —

Vegyük ezután a második esetet, a melyben az $e^{(2)}$ és $e_1^{(2}$ fokális parabolák, a melyeknek csúcsai S és S_1, és jelöljük ismét az F pontból azoknak tengelyére merőleges μ síknak, valamint az $[yz]$, $[zx]$, $[xy]$ síkoknak metszőpontjait a parabolák tengelyével M, M_1, M_2 és M_3-mal. Az MM_1, MM_2, MM_3 pontpárok most kapcsolt pólusok az $F_1^{(2)} F_2^{(2)}$ elliptikus és az $F_3^{(2)}$ hiperbolikus paraboloidra nézve, tehát az MM_1, MM_2, MM_3 vonaldaraboknak C_1, C_2, C_3 felezőpontjai, csúcsai az illető paraboloidoknak.

Az S és S_1 pont gyújtópontja e paraboloidok azon főmetszéseinek, a melyeknek síkjai az $e^{(2)}$-nek, illetve az $e_1^{(2)}$-nek síkjára merőlegesek.

A 27. pontban levő p vonaldarab tehát az SS_1, az s vonaldarab pedig a C_1S, míg a 28. pontban levő s vonaldarab a C_3S. E vonaldarabok segélyével tehát a 27. és 28. pontban levő φ szög szerkeszthető.

Ezzel mind a hat esetben megmutattuk, hogy mikép oldandók meg a feladatok, ha az F pont van adva. Ámde ezek a szerkesztések harmadfokúak, mert ezek a másodrendű kúp tengelyeinek meghatározását kivánják, a mely harmadfokú feladat. Ezért:

Azok a szerkesztések, a melyeknek segélyével az F pontból az f egyenes úgy határozható meg, hogy egy adott kúpszelet pontjainak távolságai az F ponttól és az f egyenestől állandó viszonyban legyenek, általában harmadfokúak.

Klug Lipót.

NÉHÁNY n-EDFOKÚ EGYENLET DISCRIMINÁNSA.

I. *Az*

$$f(x) = x^{2n} + px^n + q = 0 \tag{1}$$

egyenlet discriminánsa. Jelöljük $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$-el a megadott egyenlet gyökeit, akkor discriminánsa

$$\Delta = (-1)^{\frac{2n(2n-1)}{2}} f'(x_1) f'(x_2) \ldots f'(x_{2n}),$$

melyben $f'(x)$ az $f(x)$-nek első differencziálhányadosát jelenti, vagyis

$$f'(x_r) = nx_r^{n-1}(2x_r^n + p).$$

De 1)-ből

$$x_r^n = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

és

$$2x_r^n + p = +\sqrt{p^2 - 4q}, \quad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

továbbá

$$2x_i^n + p = -\sqrt{p^2 - 4q}. \quad (i = n+1, n+2, \ldots, 2n)$$

Ennélfogva

$$\Delta = (-1)^{-n} \prod_{r=1}^{2n} nx_r^{n-1} \prod_{r=1}^{n} (+\sqrt{p^2-4q}) \prod_{i=n+1}^{2n} (-\sqrt{p^2-4q}) =$$

$$= (-1)^n n^{2n} q^{n-1} (\sqrt{p^2-4q})^n (-\sqrt{p^2-4q})^n$$

s végre

$$\Delta = n^{2n} q^{n-1} (p^2 - 4q)^n.$$

Ez a kifejezés mutatja, hogy az 1) alatt álló egyenletnek csakis akkor vannak egyenlő gyökei, ha vagy az abszolut tag, vagy pedig ha az adott egyenletből leszármaztatható másodfokú egyenlet discriminánsa zérus.

II. *Az*

$$f(x) = x^n + ax + b = 0 \tag{2}$$

egyenlet discriminánsa. Ha ennek az egyenletnek gyökei x_1, $x_2, \ldots, x_n$, akkor discriminánsa

$$\Delta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} f'(x_1) f'(x_2) \dots f'(x_n).$$

De

$$f'(x_r) = \frac{nx_r^n + ax_r}{x_r} = \frac{nb + (n-1)\,ax_r}{-x_r}$$

s igy

$$\Delta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b^{-1} \prod_{r=1}^{n} [nb + (n-1)\,ax_r].$$

Másrészt az utóbbi egyenlőségben álló szorzat a következőképen alakitható át:

$$x^n + ax + b = \prod_{r=1}^{n} (x - x_r)$$

s ha x helyébe $-\dfrac{nb}{(n-1)\,a}$ értéket helyettesítjük s azután az egyenlet mindkét oldalát $(n-1)^n a^n$ kifejezéssel szorozzuk, akkor az

$$\prod_{r=1}^{n} \left[nb + (n-1)\,ax_r\right] = (-1)^n \left[(-1)^n n^n b^n - (n-1)^{n-1} a^n b\right]$$

egyenletet kapjuk. Ennek tekintetbe vételével a discriminåns a következő alakot ölti:

$$\Delta = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left[(-1)^n n^n b^{n-1} - (n-1)^{n-1} a^n\right].$$

E kifejezés mutatja, hogy a 2) alatt álló egyenletnek sohasem lehetnek egyenlő gyökei, ha páros n esetében b negativ vagy páratlan n esetében, ha a pozitiv.

III. Hasonló eljárással, a minőt alkalmaztunk az előző esetben, nyerjük, hogy *az*

$$x^n + cx^{n-1} + d = 0 \qquad 3)$$

egyenletnek discriminánsa

$$\Delta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left[(-1)^{n-1} c^n (n-1)^{n-1} + n^n d\right] d^{n-2}.$$

Ebből kitünik, hogy a 3) alatt álló egyenletnek nem lehetnek egyenlő gyökei d-nek zérustól különböző értékei mellett, ha páros n esetében d negativ, sem akkor, ha páratlan n esetében c és d egyenlő előjelű.

Grúber Nándor.

RADIOAKTIV ANYAGOKRA VONATKOZÓ VIZSGÁLATOK.

(Második közlemény.)

II. FEJEZET.

Az új radioaktiv anyagok.

A vizsgálat módszere. A radioaktiv ásványok tanulmányozásának a megelőző fejezetben összefoglalt eredményei CURIE urat és engem arra ösztönöztek, hogy egy új radioaktiv anyagnak a szurokérczből való kiválasztására törekedjünk. Kutatásunk módszere csakis a radioaktivitáson alapulhatott, minthogy e föltételezett anyagnak semmiféle egyéb jellemző sajátságát nem ismertük. A radioaktivitás a következő módon használható fel ilynemű kutatásra. Megmérjük egy anyag radioaktivitását s az anyagot kémiai úton felbontjuk: az így nyert alkatrészeknek ujra megmérjük a radioaktivitását s így eldönthetjük, vajjon a radioaktiv anyagot az alkatrészek egyike egészen magában foglalja-e, vagy pedig több alkatrész osztozik benne bizonyos arányban. A radioaktivitás ilyenformán oly útmutatással szolgálhat, a mely bizonyos mértékben ama szolgálatokhoz hasonlitható, a melyeket a spektrálanalizis tehetne. Hogy egymással összehasonlitható számadatokat nyerjünk, az anyagok radioaktivitását szilárd és jól kiszáritott állapotban kell lemérnünk.

Polónium, rádium, aktinium. A szurokérczenek az emlitett módszerrel való analizise segitségével sikerült megállapitanunk, hogy ezen ásványban két egymástól kémiailag különböző, erősen radioaktiv anyag fordul elő: az általunk felfedezett *polónium* és a *rádium*, melyre BÉMONT közreműködésével bukkantunk.*

---

* P. CURIE és CURIE asszony, Comptes rendus, 1898 julius. — P. CURIE, CURIE asszony és G. BÉMONT, Comptes rendus, 1898 deczember.

A *polónium* analitikailag közel áll a bizmúthoz és elválasztáskor vele együtt marad. A következő frakczionálási eljárások mindegyike által polóniumban mindinkább gazdagabb bizmútot nyerünk:

1. A szulfidokat légüres térben szublimáltatjuk; a radioaktiv szulfid sokkal illóbb, mint a bizmútszulfid.

2. A salétromsavas oldatot vizzel higítjuk; a kicsapódó szubnitrát sokkal erősebben radioaktiv, mint a feloldott állapotban maradt só.

3. Erősen savanyított sósavas oldathoz kénhidrogént vezetünk: a kicsapódó szulfidok jelentékeny mértékben erősebb radioaktivitást mutatnak, mint az oldott állapotban maradó só.

A *rádium* a szurokérczből előállított báriumot kiséri; a reakcióknál a báriumot követi: elválasztható tőle az által, hogy különböző chloridjuknak oldhatósága vizben, borszeszes vizben és sósavval savanyított vizben. Mi úgy választottuk szét a rádiumchloridot a báriumchloridtól, hogy keveréküket frakczionált kristályosodásnak vetettük alá, a rádiumchlorid kevésbbé oldható lévén, mint a báriumchlorid.

Egy a szurokérczben előforduló harmadik erősen radioaktiv anyag jellemző sajátságait DEBIERNE állapította meg, ki ezen anyagnak az *aktinium* nevet adta.* Az aktinium bizonyos a szurokérczben előforduló vas-csoportbeli anyagokat kiséri; úgy látszik különösen a tóriumhoz áll közel s eddig nem is lehetett a tóriumtól különválasztani. Az aktiniumnak a szurokérczből való előállítása igen fáradságos, mert a szétválasztások általában nem tökéletesek.

Mind a három új radioaktiv anyag a szurokérczben valóban elenyésző csekély mennyiségben fordul elő. Hogy koncentált radioaktiv anyagot kapjunk, kénytelenek voltunk az uránércz több tonnáját kezelésnek alávetni. Az előzetes kezelés gyárilag történik; ezt követi a tisztítási és konczentrálási munkálatok egész sora. Ilyenformán sikerül néhány ezer kilogrammnyi nyers anyag-

---

* DEBIERNE, Comptes rendus, 1899 október és 1900 április.

ból néhány deczigrammnyi oly anyagot előállítani, a melynek radioaktivitása a nyers anyagéhoz képest valóban bámulatos. Mondanunk sem kell, hogy mindez csak hosszú, fáradságos és költséges munka árán lehetséges.*

Munkálataink folyamán más új radioaktiv anyagokról vettünk tudomást. Egyrészt Giesel, másrészt Hoffmann és Strauss egy új radioaktiv anyag létezését jelezték valószinűnek, a mely kémiai sajátságaira nézve az ólomhoz áll közel. Az eddigi vizsgálatok azonban még csak kevés adatot szolgáltattak ez anyag megismeréséhez.**

Az összes új radioaktiv anyagok közül egyedül a rádiumot sikerült tiszta só alakjában különválasztani.

A rádium spektruma. Elsőrendű fontosságúnak tartottuk az új radioaktiv elemek létezésére vonatkozó, e munkálataink folyamán fölállított hipotézisünket minden lehetséges módon ellenőrizni. S ime a rádium esetében a szinképelemzés tökéletesen igazolta e föltevést.

Demarçay úr volt oly szives magára vállalni az új radioaktiv anyagok megvizsgálását ama szigorú eljárásokkal, melyeket fotografált szikraszínképek tanulmányozásánál alkalmaz.

---

* Számos kötelezettségünk van mindazokkal szemben, a kik e munkánkban minket támogattak. Őszinte köszönetet mondunk Mascart és M. Lévy uraknak jóakaró támogatásukért. Suess tanár úr jóakaró közbelépésére az osztrák kormány oly szives volt a kezelt salak első tonnáját rendelkezésünkre bocsátani (a csehországi joachimsthali állami műhelyből). A párisi «Académie des Sciences», a «Société d'Encouragement pour l'Industrie nationale», egy névtelen meczénás elláttak ama segédeszközökkel, a melyek bizonyos mennyiségű anyag kezelésére szükségesek. Debierne barátunk vezette az ércz első kezelését a «Société Central de Produits chimiques» gyárában. E társulat elvállalta minden haszonkeresés nélkül a nyers anyagok kezelését. Fogadják valamennyien legőszintébb köszönetünket.

Legujabban az «Institut de France» 20,000 frankot bocsátott rendelkezésünkre radioaktiv anyagok előállítása czéljából. Ezen összegből öt tonna nyers anyag kezelését kezdhettük meg.

** Giesel, Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft, XXXIV. kötet, 1901., 3775. lap. Hoffmann és Strauss, ugyanott XXXIII. kötet, 1900. 3126. lap.

Nagy jótétemény volt ránk nézve az ennyire szakavatott tudós támogatása s mély hálával tartozunk neki azért, hogy e munkára vállalkozott. A színképelemzés módszerei meghozták nekünk a biztosságot akkor, midőn még kétségben voltunk vizsgálataink eredményeinek értelmezésére nézve.* A Demarçay által megvizsgált első még csak mérsékelten radioaktiv rádiumos báriumchlorid adagok a bárium vonalakon kívül az ibolyán-túli színképben jelentékeny erősségű $\lambda = 381{\cdot}47$ $\mu\mu$ hullámhosszúságú új vonalat mutattak. Később készített erősebb aktivitású preparátumoknál Demarçay erősbödni látta a 381·47 vonalat; egyidőben új sugarak jelentek meg s az új színképben már a bárium- és rádiumvonalak egymással összemérhető erősséggel mutatkoztak. Ujabb konczentrálás már oly anyagot szolgáltatott, melyben az új színkép lép előtérbe és a még látható három legerősebb báriumvonal már csak mint tisztátlanság jelzik e fémnek jelenlétét. Ezen anyag már szinte tiszta rádiumchloridnak tekinthető. Végre sikerült ujabb tisztítás után rendkívül tiszta chloridot előállítanom, melynek színképében a bárium két fővonala már csak nehezen látható.

Itt közöljük Demarçay ** szerint a rádium fővonalainakl ajstromát a $\lambda = 500$-tól $\lambda = 350{,}0$ ezred mikronig ($\mu\mu$) terjedő színképdarabban. Minden vonal erősségét egy szám jelzi: a legerősebb vonal erőssége 16.

* Legujabban mély fájdalommal kellett kimúlni látnunk a jeles tudóst, épen midőn a ritka földek fémeire és a spektroszkópiára vonatkozó gyönyörű vizsgálatait folytatta, oly módszereket, melyeknek tökéletességét és szabatosságát nem győzik eléggé csudálni. Megindulva emlékezünk vissza lekötelező szivességéért, melylyel a munkánkon való részvételbe beleegyezett.

** Demarçay, Comptes rendus, 1898 deczember, 1899 november és 1900 július.

λ	*erősség*	λ	*erősség*
482·63	10	453·35	9
472·69	5	443·61	8
469·98	3	434·06	12
469·21	7	381·47	16
468·30	14	364·96	12
464·19	4		

Az összes vonalak élesek és vékonyak, a 381·47, 468·30 és 434·06 vonalak erősek. A szinképben továbbá két erős ködsáv látható. Egyik szimmetrikusan terjed 463·10-től 462·19-ig; maximuma 462·75-nél van, a másik erősebb és az ibolyántúli rész felé gyöngül; 446·37-nél kezdődik minden átmenet nélkül, már 445·52-nél maximuma van; a maximum zónája 445·34-ig terjed, végre fokozatosan gyöngülő ködsávban folytatódik 439-ig.

A szikra színkép kisebb törésű le nem fényképezett részében egy egyedüli figyelemreméltó vonalat talált körülbelül 566·5-nél, ez is azonban jóval gyöngébb, mint a 482·63.

A spektrum általános képe az alkaliföld-fémekéhez hasonló; mint ismeretes, e fémek színképében erős vonalak mutatkoznak néhány ködsávval.

Demarçay szerint a rádium egyike a legérzékenyebb spektrális reakczióval biró testeknek. Különben konczentrálás munkálataim után arra tudtam következtetni, hogy az első megvizsgált adagban, mely már határozottan mutatta a 381·47 vonalat, csak igen kevés (talán 0·02 százalék) rádium lehetett. Mégis 50-szer akkora aktivitásra van szükség, mint a milyen a fémurániumé, hogy a főrádiumvonalat a fotografált színképben felismerhessük. Érzékeny elektrometer valamely anyag aktivitását még akkor is elárulja, midőn az aktivitás a fémurániuménak alig századrésze. Látnivaló tehát, hogy a rádium jelenlétének földerítésére nézve a radioaktivitás több ezerszer érzékenyebb, mint a spektrális reakczió.

Igen aktiv polóniumos bizmút és szintén igen aktiv aktiniumos tórium Demarçay vizsgálatainál csak bizmút, illetőleg tórium vonalakat mutattak.

GIESEL, a ki a rádium előállításával foglalkozott, legujabban közzéteszi, hogy a rádiumbromid kárminvörösre festi a lángot. A rádium lángszínképe két szép vörös sávot mutat, egy vonalat a kék-zöldben és két halavány vonalat az ibolyában.

Az új radioaktiv anyagok előállítása. A kezelés első része abban áll, hogy az uránércztől elválasztjuk a rádiumos báriumot, a polóniumos bizmútot és az aktiniumot tartalmazó ritka földek fémeit. Ha megvan e három anyag, következik a második feladat: mindegyikükből az új radioaktiv anyag kiválasztása. A kezelés második része frakczionálási módszerrel történik. Mint ismeretes, nehéz oly módszert találni, melylyel egymáshoz igen közel álló elemek tökéletes szétválasztása sikerül: a frakczionálási eljárások tehát nélkülözhetetlenek. Különben is, ha két elem elegyében az egyik csak nyomokban fordúl elő, még ha ismernénk is egy teljes szétválasztási módszert, nem szabadna ezen eljárást az elegyre alkalmaznunk, mert ki volnánk téve annak, hogy a szétválasztás által elenyésző csekély mennyiségben keletkező anyagot teljesen elveszitjük.

Én különösen oly munkálatokkal foglalkoztam, melyeknek czélja a rádium és a polónium különválasztása. Néhány évi fáradozás után még csak a rádiummal tudtam czélt érni.

Minthogy a szurokércz igen drága, le kellett mondanunk arról, hogy nagy mennyiségeket vegyünk kezelés alá. Európában ezt az érczet Csehországban a joachimsthali bányában hozzák napvilágra. Az érczet apróra zúzzák, nátriumkarbonáttal pörkölik és előbb meleg vízben, azután higitott kénsavban kiáztatják. Az oldatban marad az uránium, melynek a szurokércz értékét köszöni. Az oldhatatlan salakot eldobják.

Pedig ez a salak tartalmazza a radioaktiv anyagokat; aktivitása 4 és félszer akkora, mint a fémurániumé. Az osztrák kormány, a bánya tulajdonosa, lekötelező szivességgel rendelkezésünkre bocsátott egy tonna salakot és felhatalmazta a bányát, hogy még több tonnát is adjon belőle.

Nem volt valami könnyű dolog, az első kezelést gyárilag laboratóriumi eljárásokkal végezni. DEBIERNE vállalkozott a kérdés tanulmányozására és a gyári kezelés vezetésére. Az általa kijelölt eljárás leglényegesebb pontja a szulfátoknak karbonátokká való átalakitása, a mi az által történik, hogy az anyagot telitett nátriumkarbonát oldatban forralják. Ezen eljárással elkerülhető a nátriumkarbonáttal való összeolvasztás.

A salak főleg ólom és kalcziumszulfátokat, szilicziumot, aluminiumot és vasoxidot tartalmaz. Továbbá kisebb-nagyobb mennyiségben előfordúl benne majdnem minden fém (ólom, bizmút, czink, kóbalt, mangán, nickel, vanádium, antimón, thallium, a ritka földek fémei, nióbium, tantál, arzén, bárium s. i. t.) A rádium e keverékben szulfát alakban fordul elő, még pedig az elegynek legkevésbbé oldható szulfátja. A feloldáshoz a kénsavnak lehetőleg tökéletes kiküszöbölése szükséges. E czélból a salakot előbb közönséges szódának telitett forró oldatával kezelik. Az ólom, aluminium és kalcziummal lekötött kénsav nagyrészt feloldódik nátriumszulfát alakban és vizzel való öblitésekkel eltávolitható. Az alkalikus oldat egyuttal az ólmot, szilicziumot és aluminiumot is magával viszi. A vizzel leöblitett oldhatatlan salakot közönséges sósavval pállatjuk. Ez által az anyag teljesen szétbomlik és nagyrésze feloldódik. Az oldatból állitható elő a polónium és az aktinium: a polóniumot a kénhidrogén csapja ki, az aktinium pedig a szulfidoktól megszabaditott és hiperoxidált oldatból ammoniákkal kicsapott hidrátokban található. A rádium az oldhatatlan részben marad, melyet vizzel kimosnak és forró telitett nátriumkarbonáttal kezelnek. Ha csak kevés meg nem támadott szulfát maradt a keverékben, ezen művelet által a bárium- és rádiumszulfátok teljesen karbonátokká alakúlnak. Az igy nyert anyagot vizzel alaposan kimossák és kénsavmentes sósavval pállatják. Az oldat tartalmazza a rádiumot és polóniumot és aktiniumot is. Az oldatot leszűrjük és kénsavval kicsapjuk. Igy nyers rádiumos báriumszulfátot nyerünk, mely még kalcziumot, ólmot, vasat tartalmaz és kevés aktiniumot is magával ragadott. Az oldatban még kevés aktinium és polónium marad, melyet ugyanoly eljárásokkal választhatunk ki belőle, mint az első sósavas oldatból.

Egy tonna salakból 10—20 kilogramm nyers szulfátokat kapunk, melyeknek aktivitása már 30—60-szor akkora, mint a fémurániumé. Folytatjuk tisztitásukat: nátriumkarbonáttal forraljuk és chloridokká alakítjuk át a szulfátokat. Az oldatot kénhidrogénnel kezeljük, a mi által kis mennyiségben keletkeznek polónium tartalmú aktiv szulfidok. Leszürjük az oldatot, chlor hatása alatt hiperoxidáljuk és tiszta ammoniákkal lecsapjuk. A kicsapott oxidok és hidrátok igen aktivak; aktivitásuk az aktiniumtól származik. A leszűrt oldatot nátriumkarbonáttal csapjuk le. Áz alkaliföldes kicsapott karbonátokat megmossuk és chloridokká alakítjuk.

E chloridokat szárazra bepárologtatjuk és tiszta konczentrált sósavval kimossuk. A kalcziumchlorid majdnem teljesen feloldódik, míg a rádiumos báriumchlorid oldatlan állapotban marad. Ilyenformán minden tonna nyers anyagból körülbelül 8 kilogramm rádiumos báriumchloridot kapunk, melynek aktivitása körülbelül 60-szor akkora, mint a fémuránіumé. Ez a chlorid kerül aztán frakczionálás alá.

Polónium. A mint fölebb említettük, kénhidrogént bocsátva át a kezelés folyamán készített különböző sósavoldatokon, aktiv szulfidokat csapunk ki, a melyeknek aktivitása a polóniumtól ered.

E szulfidok főleg bizmútot, kevés ólmot és rezet tartalmaznak; az ólom csak csekély mennyiségben szerepel, mert nagyrészét eltávolítja a szódaoldat és mert chloridja kevéssé oldható. Az antimón és arzén csak elenyésző csekély mennyiségben fordulnak elő az oxidokban, minthogy oxidjait a szóda feloldja. Következő eljárás utján igen aktiv szulfidokat nyertünk: az igen savanyú sósavoldatokat kénhidrogénnel lecsaptuk: az ily körülmények közt kicsapódó szulfidok igen aktivak, ezeket használják a polónium előállítására; az oldatban oly anyagok maradnak, melyeknek kicsapódása tökéletlen fölöslegben lévő sósav jelenlétében (bizmút, ólom, antimón). Hogy a kicsapódás teljes legyen, az oldatot vizzel higitjuk, ujból kénhidrogénnel kezeljük és egy második, már sokkal kevésbbé aktiv szulfidadagot kapunk; ezeket rendesen eldobtuk. A szulfidokat további tisztítása végett ammoniumszulfiddal lemossuk, a mi által az antimón és arzén utolsó nyomait eltávolítjuk. Azután ammoniumnitrátos vizzel mossuk le a szulfidokat és higitott salétromsavval kezeljük.

Az oldódás sohasem tökéletes; mindig megmarad még némi oldatlan salak kisebb-nagyobb mennyiségben, a melyet ha szükségét látjuk, ujból kezelés alá vehetünk. Az oldatot kis térfogatra bepárologtatjuk és vagy ammoniákkal, vagy sok vizzel bepárologtatjuk. Mindkét esetben az oldatban még benmarad az ólom és a réz, a második esetben még némi igen kevéssé aktiv bizmút is.

Az oxid vagy szubnitrátokból álló csapadékot a következő frakczionálásnak vetjük alá: a csapadékot salétromsavban feloldjuk, vizet adunk az oldathoz addig, a míg kellő mennyiségű csapadék keletkezik; e műveletnél tekintettel kell lenni arra is, hogy a csapadék néha csak bizonyos idő mulva keletkezik. Elválasztjuk a csapadékot a fölötte úszó folyadéktól és ujra feloldjuk salétromsavban; az így nyert két folyadékon ismételjük a vizzel való lecsapás műveletét s i. t. A különböző adagokat aktivitásuk szerint egyesítjük és a konczentrálást annyira visszük, a mennyire csak lehet. Ez úton igen csekély mennyiségben kapunk egy anyagot, melynek aktivitása óriási, mely azonban mostanáig mégis csupán a bizmút-vonalakat mutatta a spektroszkópban.

Sajnos, kevés a kilátás arra, hogy a polónium különválasztása ez úton sikerüljön. A leirt frakczionálási eljárás nagy nehézségekkel jár, s ugyanez mondható minden más nedves úton való frakczionálási eljárásról. Ugyanis bármely ily eljárásnál igen könnyen keletkeznek konczentrált vagy higított savakban teljesen oldhatatlan vegyületek. Ezen vegyületek csak úgy oldhatók fel ujra, ha megelőzőleg fémállapotba visszük át, pl. káliumczianiddal való összeolvasztás által.

Minthogy amúgy is igen sok az elvégzendő művelet, e körülmény óriási akadályt gördít a frakczionálás előrehaladása elé.

Ezen nehézség még súlyosbodik az által, hogy a polónium aktivitása, a szurokérczből való előállítás után csökken.

Az aktivitás fogyása azonban lassan történik: például egy adag polóniumos bizmútnitrát aktivitásának felét 11 hónap alatt vesztette el.

A rádiumnál semmiféle hasonló nehézség nem lép fel. A radioaktivitás hű útmutató marad a konczentrálás műveleténél; e művelet maga semmiféle nehézséggel nem jár és a munka előrehaladása kezdettől fogva a színképelemzés által mindig ellenőrizhető volt.

Midőn az indukált radioaktivitás jelenségei, melyekről később szó lesz, ismeretesekké lettek, elég közelfekvő volt a föltevés, hogy a polónium, mely csupán a bizmút vonalait mutatja és a melynek aktivitása idővel csökken, nem új elem, hanem a rádium közelléte által a szurokérczben aktivált bizmút. Én nem vagyok meggyőződve e vélemény helyességéről. A polóniummal végzett hosszas munkálataim folyamán, oly kémiai hatásokat vettem észre, melyeket sohasem tapasztaltam sem a közönséges bizmúton, sem pedig a rádiummal aktivált bizmúton. E kémiai hatások először: az oldhatatlan vegyületek (különösen szubnitrátok) rendkívül könnyen való keletkezése, a mit már előbb említettem, másodszor: a polóniumos bizmút vizzel felereszteit salétromsavas oldatából keletkező csapadékok szine. E csapadékok néha fehérek, de többször többé-kevésbbé élénk sárga szinűek egészen sötét vörösig.

Az a körülmény, hogy a polóniumos bizmút a bizmút vonalakon kívül más vonalakat nem mutat, nem bizonyít határozottan a mellett, hogy az anyag csakis bizmútot tartalmaz, minthogy vannak oly anyagok, melyeknek spektrális reakcziója kevéssé érzékeny.

Kivánatos volna kis mennyiségben a lehető legkonczentráltabb polóniumos bizmútot előállítani és kémiailag tanulmányozni s első sorban meghatározni atómsúlyát. E vizsgálat a kémiai eljárásnak előbb részletezett nehézségei miatt eddig még nem volt keresztülvihető.

Ha be volna bizonyítva, hogy a polónium új elem, az is ki volna mutatva, hogy ezen elem nem maradhat meg mindörökké erősen radioaktiv állapotban, ha egyszer a szurokérczből kiválasztják. A jelenséget akkor kétféleképen lehetne értelmezni: először vagy a polónium egész aktivitása önmaguktól radioaktiv anyagok szomszédsága által létrejövő indukált radioaktivitás; a polónium állandó atomikus aktiválódási képességet mutatna, a mely képesség úgy látszik nem minden anyagnak jut osztályrészül; vagy pedig 2-or a polónium aktivitása saját radioaktivitás, mely bizonyos körülmények közt önmagától elpusztul, míg más körülmények mellett, melyek a szurokérczben megvalósulnak, állandó maradhat. Az érintkezési atomikus aktiválás jelensége még oly kevéssé ismeretes, hogy erre a kérdésre nézve nem tudunk magunknak összefüggő véleményt alkotni.

Legujabban Marckwaldnak egy dolgozata jelent meg a polóniumról.* Marckwald egy tiszta bizmútból való pálczikát mártott a szurokércz kezeléséből maradt salakból előállitott bizmút sósavas oldatába. Bizonyos idő mulva a pálczikára igen aktiv csapadék rakódik le és az oldatban már csak avtivitás nélküli bizmút marad. Marckwald ilyen úton igen aktiv csapadékot kap, ha a radioaktiv bizmút oldatát ónchloriddal keveri. Marckwald ebből arra következtet, hogy az aktiv elem a telluriummal rokon és *radiotelluriumnak* kereszteli. Úgy látszik, hogy Marckwald aktiv anyaga azonos a polóniummal, keletkezéséből és az általa kibocsátott könnyen elnyelhető sugarakból itélve. A kérdés mai állásánál mindenesetre fölösleges ezen anyagnak új nevet adni.

A tiszta rádiumchlorid előállítása. Az eljárás, melyet a tiszta rádiumchloridnak a rádiumos báriumchloridból való kiválasztása végett alkalmaztam, abban állott, hogy a chloridok keverékét előbb tiszta vizben, később sósavas vizben frakczionált kristályosodásnak vetettem alá. Így a két chlorid különböző oldható-

* Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft. 1902 junius és deczember.

ságát használjuk ki: a rádiumchlorid ugyanis kevésbbé oldható, mint a báriumchlorid.

A frakczionálás elején tiszta desztillált vizet használunk. Feloldjuk a chloridot s addig forraljuk az oldatot, míg a forráspontnál telitett nem lesz, azután egy letakart csészében lehülés által kikristályosítjuk. A csésze fenekére szép kristályok tapadnak, míg a fölöttük úszó telitett oldat könnyen leönthető. Ha ezen leöntött oldatból egy próbát szárazra bepárologtatunk, azt találjuk, hogy az így nyert chlorid körülbelül ötször kevésbbé aktiv, mint a kikristályosodott chlorid. A chloridot így két adagra osztottuk: *A* és *B* adagra, melyek közül az *A* adag sokkal aktivabb, mint a *B* adag. Ugyanezt a műveletet most ujból elvégezzük az *A* és *B* adagokon egyaránt és mindegyikből ismét két új adagot kapunk. Midőn a kristályosodás befejeződött, az *A* chlorid kevésbbé aktiv részét a *B* chlorid erősebben aktiv részével egyesítjük, minthogy e két adag aktivitása körülbelül egyenlő. Most három adagunk van, melyeket ismét hasonló kezelésnek vetünk alá.

Nem engedjük azonban az adagok számát állandóan növekedni. A mint e szám növekszik, a legjobban oldható adag aktivitása fogy. Midőn ezen adagnak aktivitása már jelentéktelen, kihagyjuk a frakczionálásból. Ha már megvan az adagok kivánt száma, nem frakczionáljuk tovább a kevésbbé oldható (a legdúsabb rádiumtartalmú) adagot sem s ezt is kihagyjuk a frakczionálásból.

Most már mindig ugyanannyi adaggal dolgozunk. A műveletek minden sorozata után az egyik adagból származó telített oldatot a következő adagból keletkezett kristályokra öntjük; de ha az egyik sorozat után a legjobban oldható adagot küszöböltük ki, a legközelebbi sorozatnál új oldatot fogunk készíteni a legjobban oldható adaggal és ki fogjuk küszöbölni a legaktivabb adagot. E két művelet váltakozása által igen szabályos frakczionálási módszert kapunk, melynél az adagok száma és minden adag aktivitása állandó marad (minden adag körülbelül ötször olyan aktiv, mint a következő), s a melynél egyoldalt (a frakczionálás végén) a majdnem teljesen aktivitás nélküli anyagot küszöböljük ki, a másik oldalon (a frakczionálás elején) a rádiúmban meggazdagodott chloridot gyüjtjük össze. Az adagokban foglalt anyag mennyisége szükségképen csökken és a különböző adagok annál kevesebb anyagot tartalmaznak, minél nagyobb az aktivitásuk.

Eleinte hat adaggal dolgoztunk s a végén kiküszöbölt anyag aktivitása a fémuránium aktivitásának alig volt tizedrésze.

Midőn ilyen úton az inaktiv anyag nagy részét kiküszöböltük, már nem szükséges, hogy csak az igen gyönge aktivitású anyagot küszöböljük ki; elhagyunk tehát a végéről egy adagot és az elejére egy új adagot állítunk a legutoljára keletkezett aktiv chloridból. Most tehát már rádiumban gazdagabb chloridot fogunk az elején összegyüjteni, mint előbb. Ugyanezt az eljárást folytatjuk mindaddig, míg a frakczionálás elején tiszta rádiumchlorid kristályok keletkeznek. Ha a frakczionálás tökéletes volt, az összes közbeeső anyagokból csak igen kevés fog megmaradni.

A frakczionálás előrehaladott állapotában, midőn már minden adagban kevés anyag van, a kristályosodás folytán való szétválás már kevésbbé határozott, minthogy a lehülés már igen gyorsan történik s a leönteni való folyadék térfogata is kicsiny. Itt válik szükségessé a vizet egy kis sósavval savanyitani, még pedig annál nagyobb mértékben, minél előbbre haladott a frakczionálás.

Ezen savanyitás előnye, hogy általa az oldat mennyisége növekszik, minthogy a chloridok sósavas vizben nehezebben oldhatók, mint tiszta vizben. Sőt a frakczionálás is határozottabb lesz; ugyanazon anyagból származó két különböző rész aktivitása jelentékeny mértékben különböző; ha erősen savanyitott vizet használunk, kitünő szétválasztásokat kapunk és elég csupán 3—4 adaggal dolgozunk. Mindezen előnyök arra ösztönöznek, hogy ezen eljárást alkalmazzuk, mihelyt az anyag mennyisége elég csekély ahhoz, hogy e módszert nehézségek nélkül használhassuk.

Az igen savanyú oldatból kiváló kristályok igen megnyult tűalakúak: külszinük teljesen ugyanaz a bárium- és rádiumchloridnál. Mindkét kristály kettőstörést mutat. A rádiumos báriumchlorid kristályok szintelenül rakódnak le, de midőn rádiumtartalmuk elég nagy, néhány óra mulva a narancssárgához közeledő sárga, néha szép rózsaszint öltenek. Oldásnál ez a szin eltünik. A rádiumchlorid kristályok nem szineződnek, vagy legalább is nem oly gyorsan, mint a rádiumos báriumchlorid kristályai, úgy, hogy a szineződés talán a rádium és bárium egyidejű jelenlétének tulajdonitandó. A szineződés maximumát éri el a rádium bizonyos konczentrácziójánál és a szineződés alapján a frakczionálás előrehaladása is ellenőrizhető. A míg a legaktivabb adag szineződik, még jelentékeny mennyiségű báriumot tartalmaz; midőn már nem szineződik, de a következők még szineződnek, ez már arra mutat, hogy az első adag már körülbelül tiszta rádiumchlorid.

Néha észrevettem, hogy a lerakódott kristályok részben szineződtek, részben szintelenek maradtak. Lehetségesnek látszott a szintelen kristályokat kiválogatni, a mit azonban nem kiséreltünk meg.

A frakczionálás vége felé az egymásután következő adagok aktivitása nem oly szabályos és nem ugyanaz, mint kezdetben; azonban semmi komoly nehézség nem zavarja a frakczionálás menetét.

A rádiumos báriumchlorid vizes oldatának borszeszszel való frakczionált lecsapása szintén a rádiumchlorid különválasztására vezet; a rádiumchlorid ugyanis előbb csapódik le. Kezdetben ezt az eljárást használtam, de aztán az imént leirt módszerrel cseréltem fel, mely nagyobb szabályossággal végezhető. Azonban még alkalmaztam néhányszor a borszeszszel való lecsapást, hogy a csekély mennyiségű báriumchloridot tartalmazó rádiumchloridot megtisztitsam. A báriumchlorid a gyöngén vizes borszeszoldatban marad és így eltávolitható.

Giesel, ki első kutatásaink közététele óta a radioaktiv anyagok előállitásával foglalkozott, a bárium és rádium szétválasztására a bromidok keverékének vizes oldatokban való frakczionált kristályositását ajánlja. Meggyőződhettem arról, hogy ez az eljárás tényleg igen előnyös, különösen a frakczionálás kezdetén.

Bármily frakczionálási eljárást követünk is, előnyös az eljárást aktivitási mérésekkel ellenőrizni.

Megjegyzendő, hogy bármely rádiumvegyület, ha megelőzőleg oldott állapotban volt és akár lecsapás, akár kristályosodás utján jut szilárd állapotba, eleinte annyival kisebb aktivitást mutat, minél hosszabb ideig volt az oldatban. Az aktivitás azután hónapokon keresztül növekszik s mindig ugyanazon határértéket éri el. A végső aktivitás öt-hatszor akkora, mint a kezdetbeli. E változások, a melyekre később még visszatérek, az aktivitás mérésénél tekintetbe veendők. Bár a végső aktivitás határozottabban definiált mennyiség, mégis gyakorlati szempontból előnyösebb a kémiai kezelés folyamán a szilárd termék kezdeti aktivitását lemérni.

Az erősen radioaktiv anyagok aktivitása egészen más nagyságrendű, mint az érczé, melyből származnak (10^6-szor akkora). Ha ezt a radioaktivitást a dolgozat elején leirt módszerrel (a készüléket az 1. rajz mutatja) akarjuk megmérni, a kvarcz hasáb csészéjére rakott megterhelést bizonyos határon túl nem fokozhatjuk.

Kisérleteinknél e megterhelés legfeljebb 4000 gramm lehetett, a mi 25 elektrosztatikus egységnek megfelelő elektromos mennyiségnek felelt meg. Tehát 1 : 4000 arányban lévő aktivitásokat még össze tudtunk hasonlitani, ha az aktiv anyaggal mindig ugyanazt a felületet boritjuk be. Hogy méréseink határait kiterjeszszük, e felületet ismert arányban változtattuk. Az aktiv anyag ez esetben a *B* lemezen ismert sugarú czentrális körfelületet borít be. Ezen viszonyok közt az aktivitás nem pontosan arányos a felülettel s így kisérleti úton határozzuk meg azon együtthatókat, melyekkel különböző nagyságú felületek esetén az aktivitások összehasonlíthatók.

Ha már ez sem segít, kénytelen az ember abszorbeáló ernyőket és más hasonló hatású eljárásokat alkalmazni, a melyekre itt nem fogok kitérni. Mindezen többé-kevésbbé tökéletlen eljárások elegendők arra, hogy a kutatásoknál útmutatásúl szolgáljanak.

Megmértük azt az áramot is, a mely a kondenzátoron áthalad, midőn egy kis akkumulátorteleppel és egy galvanometerrel egy áramkörbe kapcsoljuk. Minthogy gyakran volt szükség a galvanometer érzékenységének ellenőrzésére, ezt az eljárást nem alkalmaztuk a rendszeres aktivitási méréseknél.

*A rádium atómsúlyának meghatározása.** Vizsgálataim folyamán ismételten meghatároztam a rádiumos báriumchlorid adagokban előforduló fém atómsúlyát. Valahányszor egy új kezelés után új rádiumos báriumchlorid készlet került tisztítás alá, a konczentrálást a lehetőségig előrevittem, úgy hogy 0·1-től 0·5 gr. anyagot kaptam, mely a keveréknek majdnem egész aktivitását magában foglalta. E kevés anyagból lecsaptam alkohollal vagy sósavval néhány milligramm chloridot és a szinképelemzésnek szántam.

Demarçay kitünő módszerének köszönhető, hogy ez a csekély anyagmennyiség elegendő volt neki arra, hogy a szikraszinkép fotografiáját előállítsa. A megmaradt anyagon végeztem az atómsúly meghatározását.

A következő klasszikus eljárást követtem: meghatároztam ezüstchlorid állapotban azt a chlormennyiséget, melyet ismert mennyiségű vizmentes chlorid tartalmaz. Ellenőrzési kisérletképen meghatároztam a bárium atómsúlyát ugyanazon eljárással, ugyanoly körülmények közt és ugyanannyi anyaggal, előbb 0·5 grammal, később csupán 0·1 grammal. A nyert számadatok mindig 137 és 138 közé estek. Láttam ilyenformán, hogy e módszer kielégítő eredményeket szolgáltat még ily csekély mennyiségű anyaggal is.

A két első meghatározást a fémurániumnál 230, illetőleg 600-szor aktivább chloridokkal végeztem. E mérések a kisérleti hibák határain belül ugyanazt a számértéket adták eredményül,

---

* Curie asszony, Comptes rendus 1899 november 13., 1900 augusztus és 1902 julius 21.

mint a tiszta báriumchloriddal végzett mérés. Tehát csak akkor remélhettünk valami eltérést, ha sokkal aktivabb anyagot használunk. A következő mérést oly chloriddal végeztem, a melynek aktivitása 3500-szorosa az urániuménak; ennél a kisérletnél sikerült legelőször egy kicsiny, de biztos különbséget észrevenni, az ezen chloridban előforduló fém középatómsúlyát 140-nek találtam, a mi azt mutatta, hogy a rádium atómsúlya mindenesetre nagyobb a báriuménál. Oly anyagokat használva, melyeknek aktivitása mindinkább nagyobb volt, s melyek mindinkább erősbödő mértékben mutatták a rádium szinképét, megállapítottam, hogy a megfelelő számok is növekedtek úgy, a mint a következő táblázatból kiolvasható: (*A* jelenti a chlorid aktivitását ha az uránium aktivitását választjuk egységül; *M* a talált atómsúly):

A	*M*	
3500	140	a rádium szinképe igen gyönge
4700	141	
7500	145·8	a rádium szinképe erős, de a báriumé még határozott túlsúlyban van
10^6 nagyságrendű	173·8	a két szinkép körülbelül egyenlő mértékben érvényesül
	225	a bárium már csak nyomokban van jelen.

Az *A* oszlop számai csak hozzávetőleges útmutatóúl szolgálnak. Az erősen radioaktiv testek aktivitásának becslése ugyanis igen nehéz, különböző okokból, melyekről később lesz szó.

A fentebb leirt eljárások folyamán 1902 márcziusában 0·12 gr. rádiumchloridot állítottam elé, melynek szinképét Demarçay volt szives megvizsgálni. Demarçay véleménye szerint e rádiumchlorid már úgyszólván tiszta volt; mindamellett szinképe a három fő báriumvonalat még figyelemreméltó erősséggel mutatta.

E chloriddal négy meghatározást végeztem egymásután; e mérések eredményei:

	Vizmentes rádiumchlorid	Ezüstchlorid	M
I.	0·1150 gramm	0·1130	220·7
II.	0·1148 «	0·1119	223·0
III.	0·11135 «	0·1086	222·8
IV.	0·10925 «	0·10645	223·1

Azután ujból hozzáfogtam e chlorid tisztításához és sikerült még sokkal tisztább anyagot előállítanom, melynek szinképében a két legerősebb báriumvonal is már igen gyönge. Ismeretes lévén a bárium spektrális reakcziójának érzékenysége, Demarçay úgy vélte, hogy e tisztított chlorid «már csak oly elenyésző csekély báriumnyomokat tartalmaz, melyek nem befolyásolhatják észrevehető módon az atómsúlyt». E tökéletesen tiszta rádiumchloriddal három meghatározást végeztem, a következő eredményekkel:

	Vizmentes rádiumchlorid	Ezüstchlorid	M
I.	0·09192 gramm	0·08890	225·3
II.	0·08936 «	0·08627	225·8
III.	0·08839 «	0·08589	224·0

E számok középértéke 225. M-et itt és a megelőzőkben úgy számítottam, hogy föltettem, miszerint a rádium két vegyértékű elem, chloridjának képlete tehát $RaCl_2$; az ezüst és chlorra nézve a következő számadatokat fogadtam el: $Ag = 107{\cdot}8$, $Cl = 35{\cdot}4$.

E kisérletek eredménye tehát az, hogy a rádium atómsúlya $Ra = 225$. E számot körülbelül egy egységig pontosnak tekintem.

A mérlegeléseket egy pontosan beállított Curie-féle aperiodikus mérleggel végeztem, mely huszad milligrammot még pontosan megmutatott. E közvetlen leolvasásra berendezett mérleggel a mérlegelések igen gyorsan végezhetők, a mi száraz rádium és báriumchloridok lemérésénél lényeges, minthogy e chloridok lassankint vizet szivnak magukba még akkor is, ha a mérlegbe szárító anyagokat helyezünk. A megmérendő anyagok egy platinacsészébe voltak elhelyezve; e csésze már régóta használatban volt és meggyőződtem róla, hogy súlya nem változott egy tized milligrammal egy művelet folyamán.

A kristályosodásnál keletkező kristályviztartalmú chloridot a csészébe helyeztük és a szárítószekrényben fölmelegítettük, hogy vizmentes chloriddá alakuljon át. A kisérlet mutatja, hogy miután a chloridot néhány órán át 100°-on tartottuk, súlya már nem változott, még akkor sem, ha 200°-ra melegítettük és néhány órán át 200°-on tartottuk. Az így nyert vizmentes chlorid tehát egy tökéletesen definiált test.

Itt közlünk egy erre a tárgyra vonatkozó mérési sorozatot: a chloridot (1 dg) 55°-on a szárítószekrényben szárítjuk és egy szárítóba helyezzük foszforpentoxid fölé; így igen lassan veszít súlyából, a mi arra mutat, hogy még tartalmaz vizet; 12 óra alatt a súlyveszteség 3 mg. volt. Visszavisszük a chloridot a szárítószekrénybe és a hőmérsékletet 100°-ra emeljük. Ez alatt a chlorid 6·3 mg.-ot veszít. 3 óra 15 perczig hagyva a szekrényben, még további 2·5 mg.-ot veszít. Most 45 perczig a hőmérséklet 100° és 120° közt ingadozik, a minek következménye 0·1 mg.-nyi súlyveszteség. 30 perczig hagyva 125°-on, a chlorid semmit sem veszít súlyából. 30 perczig 150°-on tartva 0·1 mg.-ot veszít. Végre négy órán át 200°-on tartva 0·15 mgr. súlyveszteséget szenved. Minde műveletek alatt a csésze súlyváltozása 0·05 mg. volt.

Minden atómsúly meghatározás után a rádiumot ujból chloriddá alakítottuk át a következő módon: a folyadékhoz, mely a meghatározás után a rádiumnitrátot és a fölöslegben lévő ezüstnitrátot tartalmazta, tiszta sósavat töltöttünk; az ezüstchloridot szűrés által választottuk el; a folyadékot többször szárazra bepárologtattuk fölöslegben lévő tiszta sósavval. A tapasztalat mutatta, hogy ilyen úton a salétromsavat teljesen el lehet távolítani.

A meghatározásból származó ezüstchlorid mindig radioaktiv volt és világított. Meggyőződtem arról, hogy nem vitt magával mérhető mennyiségben rádiumot, az által, hogy meghatároztam ezüsttartalmát. E czélból a csészében lévő megolvasztott ezüstnitrátot czinkkel szétbontott higitott sósavból keletkező hidrogénnel redukáltam; kimosás után megmértem a csészét a benne lévő fémezüsttel együtt.

Megállapitottam továbbá kisérleti úton, hogy a regenerált rádiumchlorid súlya ugyanakkora volt, mint a művelet kezdetén. Más kisérleteknél mielőtt új műveletbe fogtam volna, nem vártam meg, hogy a mosásból megmaradt összes viz elpárolgott.

Ezen ellenőrző kisérletek nem oly pontosak, mint a közvetlen mérések; általuk azonban meggyőződhettem arról, hogy jelentékeny hiba nem csúszott be.

Kémiai tulajdonságai alapján a rádium az alkaliföldek fémei közé sorolható. E sorban a bárium fölső homológja.

Atómsúlya szerint a rádium a Mendelejeff-féle táblázatban szintén a bárium után helyezendő az alkaliföld-fémek oszlopába és abba a sorba, mely már az urániumot és a tóriumot tartalmazza.

A rádiumsók tulajdonságai. A rádiumsók, nevezetesen a rádiumchlorid, rádiumnitrát, rádiumkarbonát és rádiumszulfát külszinükre mindjárt szilárd állapotban való előállitásuk után ugyanolyanok, mint a megfelelő báriumsók, azonban mind szineződnek az idő folyamán.

A rádiumsók sötétben mind világitanak.

Kémiai tulajdonságaikat tekintve, a rádiumsók mindenben hasonlók a megfelelő báriumsókhoz. A rádiumchlorid azonban kevésbbé oldható, mint a báriumchlorid; a nitrátoknak vizben való oldhatósága, úgy látszik, nem nagyon különböző.

A rádiumsók állandó önkéntes hőkibocsátás forrásai.

A tiszta rádiumchlorid paramágneses. Fajlagos mágnesezés együtthatóját (a tömegegység mágneses momentumának viszonyát a mágneses mező erősségéhez) P. Curie és C. Chéneveau határozták meg egy általuk szerkesztett eszközzel.* Ezt az együtthatót a vizével való összehasonlitás utján határozták meg, azután

* Société de Physique, 1903 április 3.

a levegő mágneses hatására való tekintettel korrigálták. Így azt találták, hogy a mágnesezési együttható

$$K = 1{\cdot}05.10^{-6}.$$

A tiszta báriumchlorid diamágneses, fajlagos mágnesezési együtthatója

$$K = -0{\cdot}40.10^{-6}.$$

A megelőzőknek megfelel az az eredmény is, hogy egy körülbelül 17 százaléknyi rádiumot tartalmazó rádiumos báriumchlorid diamágneses és fajlagos együtthajója

$$K = -0{\cdot}20.10^{-6}.\star$$

Közönséges báriumchlorid frakczionálása. Iparkodtunk bizonyságot szerezni arról, vajjon a kereskedésben lévő báriumchlorid nem tartalmaz-e oly csekély mennyiségű rádiumchloridot, melynek jelenlétét eszközünkkel nem tudjuk kimutatni. E czélból nagy mennyiségű kereskedésbeli báriumchlorid frakczionálásába fogtunk, mert azt reméltük, hogy ha a rádiumchloridnak csak nyomai vannak is benne jelen, ilyen úton ezeket is összegyüjthetjük.

50 kilogramm kereskedésbeli báriumchloridot föloldottunk vizben; az oldatot kénsavmentes sósavval lecsaptuk és kaptunk 20 kg. lecsapódott chloridot. Ezt feloldottuk vizbe és részlegesen lecsaptuk sósavval s így 8·5 kg. csapadékot nyertünk. Ezt a chloridot ugyanoly frakczionálási eljárásnak vetettük alá, mint a rádiumos báriumchloridot és a frakczionálás *elején* 10 gramm chloridot küszöböltünk ki; ez volt a legkevésbbé oldható adag. Ez a chlorid készülékünkben semmiféle radioaktivitást nem mutatott, rádiumot tehát nem tartalmazott; a rádium tehát nem fordúl elő azon érczekben, melyekből a báriumot nyerik.

Ford. *Zemplén Győző.*

⋆ 1899-ben M. St. Meyer közétette, hogy a rádiumos báriumkarbonát paramágneses (Wied. Ann. 68. kötet). Azonban Meyer preparátuma igen kevés rádiumot tartalmazott, valószinüleg csak 0·1 százaléka volt rádiumsó. E preparátumnak diamágneses viselkedést kellett volna mutatnia. Valószínü tehát, hogy valami vasas tisztátalanság volt benne.

IRODALOM.

Pringsheim E.: **«A sugárzástörvényekről» szóló a «breslaui vegyészek társulatában»** 1903 julius 3-án tartott előadása.*

A sugárzástörvények nemcsak a spectroscopiában, hanem a physika egyéb ágaiban is kiváló fontossággal birnak. Csak a magas hőmérsékletek exact meghatározásának nehézségeire utalok, mely téren csak e törvények — mint később látni fogjuk — szolgálhatnak a mérés biztos alapjául. E törvények megállapítása a legujabb kutatások eredményei. Csak nemrég záródott le az a vita, mely egyrészről Lummer és Pringsheim, másrészről Paschen, Planck és Wien között folyt le, melynek tárgya a Kirchhoff-féle általános sugárzásfüggvény alakjának meghatározása volt s melynek befejeztével az ide vonatkozó kutatások egyelőre nyugvó pontra jutottak.

Ennek a vitának fontosabb mozzanatairól számol be előadásában Pringsheim s így természetszerűleg a sugárzástörvények megállapításának összefoglaló történetét is adja. Bár Harkányi Béla báró «az égi testek hőmérsékletének meghatározásáról» szóló és e Lapokban ** is közzétett dolgozatában összefoglalóan ismerteti a sugárzástörvényeket, azt hiszem, mégis hasznos szolgálatot teszek e Lapok olvasóinak, midőn Pringsheim előadásának fordítását adom, mivel ez érdekes kiegészítésül szolgál Harkányi említett dolgozatához.

Különben Pringsheim előadása két szempontból érdekes. Egyrészt megállapítja benne Kirchhoff törvényének igazi jelentőségét, másrészt — a mi minket magyarokat talán közelebbről érdekel — Harkányi dolgozatának jelentőségét is kiemeli. Előadásának első részében a sugárzástörvényeket, másodikában ezeknek alkalmazását adja. Az előadás maga így szól:

«Uraim! Midőn tisztelt elnökük megtisztelő felhivásának mély hálá-

* L. Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie, Photophysik und Photochemie. Bd. I. Heft 12.

** L. e Lapok 1903-iki évfolyamának októberi füzetét.

val eleget teszek, megkisérlem, hogy rövid áttekintést nyujtsak önöknek arról a haladásról, a melylyel az utolsó években a sugárzástan terén találkozunk. Tárgyunk keretét azonban szűkre kell szabnunk és épenséggel nem foglalkozhatunk mindama fontos vívmányokkal, melyekkel ujabban ismereteinket a sugárzásról és a sugarakról bővítettük. Így különösen le kell mondanom arról, hogy bemutassam önöknek a physika legifjabb csodagyermekeit, a Röntgen- és Becquerel-sugarakat, a rádium-, polonium- és N-sugarakat, melyek csodálatos tulajdonságaikkal és rejtéljes eredetükkel nemcsak a physikusok legélénkebb érdeklődését keltették fel, hanem feltünést keltve bámulatba ejtették az egész művelt világot.

Uraim! A tárgy, a melylyel ma foglalkozunk, már régóta nem feltünést keltő, hanem a közönséges fénysugaraknak és a velük lényegében azonos sugaraknak tárgya, melyet a physikusok ultravörös és ultraviolet sugaraknak neveznek.

A látható, az ultravörös és ibolyántúli sugarak sugárzás tüneményei, melyeket röviden fénysugárzásnak nevezünk — elméletileg két lényegesen különböző csoportra oszthatók; 1. olyanra, a melynél a sugárzás csakis a sugárzó test hőmérsékletétől függ és 2. olyanra, a melynél a hőmérséklet nem játszik lényeges szerepet, vagy legalább is nem az egyedül lényeges szerepet. Az első fajta tüneményeket Helmholtz R. után tiszta hősugárzásnak nevezzük, a második fajta tüneményeket Wiedemann E. luminescenciának nevezte el.

A tiszta hősugárzás tárgya igen elterjedt és fontos. Ide tartozik a kályha sugárzása, az elektromos izzólámpa szénfonalából és az ívlámpa kraterjéből kiinduló fény, a petroleumlámpa és gyertya fénye, a melyeknél a kiválasztott szilárd szén a hő hatása alatt világlik és általánosságban mindazon folyamatok, melyeket a mesterséges világításnál fényforrásul használunk.

Hogy a luminescenciára vonatkozólag is példát említsek, emlékeztetek a legközönségesebb e fajta példára, a fluoreszkálásra és foszforeszkálásra. Ezekben az esetekben a testek már oly hőmérsékleteknél sugároznak ki fénysugarakat, a melyek a közönséges izzás hőmérsékleténél kisebbek, tehát a rendes szobahőmérsékletnél, sőt a folyékony levegő hőmérsékleténél is.

I. A sugárzástörvények.

1. *Kirchhoff törvénye és a fekete test.* Lényegében véve ma csakis a tiszta hősugárzással foglalkozunk, mert csakis erre nézve sikerült sugárzástörvényeket, azaz olyan mennyileges összefüggéseket felállítani, melyek az emissió feltételei és az emittált sugárzás neme és intensitása

között merül fel. A legregibb sugárzástörvény, mely az egész quantitativ sugárzástan alapja, a sugárzó testek absorbeáló és emittáló képessége közötti vonatkozást feltüntető, KIRCHHOFF által 1860-ban felállított és elméletileg levezetett törvény, mely csakis tisztán hősugárzásra érvényes. E sugárzás feltételeit KIRCHHOFF élesen és világosan körvonalozta. Ezeket következőkép formulázhatjuk: Sugárzás alakjában kibocsátott energia egyenesen és teljesen csakis a sugárzó test hőenergiájából keletkezhetett és a test által elnyelt sugárzóenergia egyenesen és teljesen hőenergiává alakíttatott át. Ha így áll a dolog, és csakis ebben az esetben, alkalmazható CARNOT elve sugárzás útján keletkezett hőre, miből KIRCHHOFF törvénye azután levezethető.

Ha különböző sugárzó- és absorbeáló képességgel biró tetszőleges számú testünk van, melyek mindegyikének hőmérséklete T, s melyeknek emissioképességük rendre E_1, E_2, E_3,... és absorbeáló képességük rendre A_1, A_2, A_3,... egy meghatározott s mindegyikre egyenlő λ hullámhosszra, tehát egy meghatározott homogén spectrálszínre vonatkoztatva, akkor:

$$\frac{E_1}{A_1} = \frac{E_2}{A_2} = \frac{E_3}{A_3} = \ldots$$

Itt emissióképesség alatt egy olyan mennyiséget értünk, a mely a testből kiinduló λ hullámhosszal biró sugárzás intensitását méri, míg az absorptióképesség a testre eső sugárzás azon törtrésze, mely tőle elnyeletik. Ha tehát J energia esik reá, akkor AJ elnyeletik és így az absorptióképesség:

$$A = \frac{AJ}{J}.$$

Az el nem nyelt sugarak ujra kilépnek a testből, a mennyiben részben róla reflectáltatnak, részben rajta átbocsáttatnak. Szigorúan véve a dolgot, az emissió- és absorptióképességet a sugarak egy meghatározott irányára és egy meghatározott polarisatióirányra kell vonatkoztatni, de ilyen részletezéstől itt eltekintünk. KIRCHHOFF törvénye ezek szerint tehát azt fejezi ki, hogy az emissió- és absorptióképesség viszonya egyenlő hőmérsékletnél és egyenlő hullámhossznál minden testre nézve ugyanaz, tehát független a sugárzó testek természetétől. Ezen állandó és a test természetétől független viszonyt S_λ-val fogjuk jelölni, hol λ indexxel azt fejezzük ki, hogy e viszony értéke csakis λ függvénye, tehát különböző λ-ra nézve különböző. KIRCHHOFF törvényét

$$\frac{E_\lambda}{A_\lambda} = S_\lambda$$

alakba írjuk és E_λ s A_λ alatt egy tetszőleges test emissió- illetve absorptióképességét értjük λ hullámhosszra vonatkoztatva.

Mit jelent S_λ? Ha $A_\lambda = 1$, akkor $E_\lambda = S_\lambda$, s így S_λ egy olyan test emissióképessége, melynek absorptióképessége az egység, azaz a mely minden reáeső λ hullámhosszú sugarat elnyel. Ha egymás után minden különböző λ hullámhosszra alkalmazzuk ezt az egyenletet, akkor S_λ minden hullámhosszra egy oly test emissió képességét jelenti, melynek absorptióképessége minden hullámhosszra $= 1$. Egy ilyen, egyelőre csak képzeleti test, mely minden reáeső idegen fényt elnyelne, idegen fényben teljesen feketének tünnék fel. Ez a Kirchhoff által elméletileg definiált *fekete test*, mely a reáeső sugarakat elnyeli, tehát sugarakat sem nem reflektál, sem át nem bocsát.

Mily jelentőséggel bir hát Kirchhoff törvénye?

Hosszú ideig egy következtetésben látták Kirchhoff törvényének jelentőségét, mely e törvényből levonható s melyet már maga Kirchhoff is levont. Ez abban áll, hogy egy test, mely egy meghatározott hullámhossznál minden sugárra nézve különös nagy emissióképességgel bir, ugyanezen sugarakra nézve különös nagy absortióképességgel is bir. Vagy más szavakkal: Egy vonalspectrumot adó (sötét alapon világos vonalak) világító anyag ezen vonalspectrumnak teljesen megfelelő absorptióspectrummal kell hogy birjon, tehát sötét vonalakat világos alapon kell hogy mutasson, melyeknek hullámhosszai és a spectrumban elfoglalt helyzetei teljesen megegyezni tartoznak az emissióspectrum ugyanazon vonalaival. Hosszú ideig ezt a következtetést a spectrumanalysis legfontosabb kisérletének — a spectrumvonalak megfordítása kisérletének — elméleti alapjául és egyúttal azon következtetések alapjául tekintették, melyeket a Fraunhofer-féle vonalaknak a spectrumban elfoglalt helyzetéből és földi elemek spectrumainak fényes vonalaival való megegyezéséből a Nap vegyi alkatára vontak. Ujabb időben mindinkább az a felfogás lett uralkodóvá, hogy ezekben a vonatkozásokban Kirchhoff törvényének jelentőségét nagyon túlbecsülték. Ez a törvény ugyanis csakis tiszta hősugárzásra érvényes, de azok a jelenségek, melyekről itt szó van, a melyeknél a gázalakú elemek vonalspectrumokat létesítenek, nem tekinthetők csakis tiszta hősugárzásnak, hanem ezek luminescenciajelenségek is. Ezekre a jelenségekre Kirchhoff törvénye nem is alkalmazható. A belőle vont következtetés mégis helyes és pedig azért, mert e következtetés nem alapul tiszta hősugárzáson — mint Kirchhoff törvénye, hanem sokkal szélesebb alappal bir. Ez a következtetés minden resonantiajelenség egy általános tulajdonságának kifejezője. Minden rezgő rendszer olyan rezgéseket, minőket maga is létesíthet, kiváló mértékben képes elnyelni. Ezt tapasztaljuk a mechanikában az ingáknál, a hangtanban a resonatoroknál, húroknál stb, és ugyanezt a luminescentia legközönségesebb példáján, a fluoreszkálásnál mutatta ki nemrég BURKE. Ha tehát KIRCHHOFF törvényét megfosztjuk azon nimbusától, mintha a spectrumanalysis elméleti alapja volna, valódi és tulajdonképeni jelentősége a legutóbbi időben — melyet a spectrumanalysis hatalmas eredményei folytán hosszú időn át nem láttak, vagy elhanyagoltak — annál világosabban domborodott ki.

KIRCHHOFF törvénye a tiszta hősugárzás alapján a természetben előforduló minden test emissióját egyszerű kapcsolatba hozza egy meghatározott testével, a feketeével. Ha ismernők S_λ függvény értékét, azaz ha ismernők a fekete test emissióját minden hullámhossznál és minden hőmérsékletnél, akkor e függvényből kiszámíthatnók minden tetszőleges test emissióját, ha A_λ absorptióképességét ismernők. Az S_λ függvény tehát meghatározza azt a legáltalánosabb függést, melyet a sugárzás a hőmérséklettel és hullámhosszal mutat, eltekintve egy speciális test minden individuális absorptiótulajdonságától. Míg a spectrumanalysis a különböző anyagok sugárzó tulajdonságainak individuális különbségeire van tekintettel, és a különböző elemeket emissiójuk jellegzetes különbségeiből ismeri meg, úgy itt most az a feladat, megtalálni azt az általános, minden testre érvényes S_λ emissiófüggvényt, a melyből aztán az egyes testek speciális E_λ emissiófüggvényei az absorptióképesség segítségével nyerhetők. Itt tehát nem az a kérdés, mi választja el a testeket, hanem az, mi foglalja őket össze?

A fekete test sugárzásfüggvénye (Strahlungsfunktion) megadja egyúttal azt a maximális értéket, melyet adott hőmérsékletű test egyáltalán elérhet. Minthogy legfeljebb $A_\lambda = 1$, általánosságban valódi tört, minden hullámhosszra nézve a fekete test sugárzása — vagy THIESEN szerint a fekete sugárzás — az a legnagyobb intensitás, melyet ilyen megadott hőmérsékletű test egyáltalán elérhet. A legfeketébb test egyúttal a legfehérebb, a legintenzívebb, a legvilágítóbb. Ez a látszólagos ellenmondás, ez a paradoxon épen KIRCHHOFF törvényének kifejezése, mely szerint valamely test fényessége emissiokor átlátszatlanságával, absorptiokor feketeségével arányos.

Thermodynamikus vonatkozásaiban minden más sugárzás fölött is kiváló a fekete sugárzás, mely a sugárzás stabilis egyensúlyi állapota gyanánt tekinthető, melybe munkakifejtés nélkül minden más sugárzás átvezethető.

Maga KIRCHHOFF élesen kiemelte törvényének e jelentőségét, midőn kimondotta, hogy törvényének termékenysége a maga teljes egészében csak akkor fog mutatkozni, midőn kisérleti úton megállapítva lesz azon függvény alakja, mely minden hullámhossznál és minden hőmérsékletnél meghatározni engedi a fekete test sugárzását.

A következőkben azokkal a munkálatokkal fogunk foglalkozni, melyek az S_λ általános sugárzásfüggvény teljes ismeretéhez vezettek. Előbb azonban egy egyszerű kisérletet végezünk, melynek czélja megmutatni, hogy az emissióképesség és absorptióképesség Kirchhoff törvényének megfelelően egymással párhuzamosan folynak le.

Egy vékony platinalemezt, mely csak 0.01 mm vastag, két végéhez hozzávezetett erős elektromos árammal élénk izzásba hozok. A 8 cm. hosszú és 4 cm. széles lemez mellső lapjának közepére egy köralakú téntafoltot helyeztem. A lemez e része tehát sötétebb ennek fénylő felületénél, nagyobb absorptióképességgel bir emennél. Az áramot zárom és az erősen izzó lemez képét lencse segélyével egy fehér ernyőre vetítem. Láthatni, miként emelkedik ki a téntafolt a sötétebben izzó platinalemezből, és nagyobb absorptióképességének ugyanazon hőmérséklet mellett nagyobb emissióképesség is felel meg Kirchhoff törvénye szerint. Hogy a téntafolt hőmérséklete az őt környező platináénál tényleg nem nagyobb, könnyen megismerhetni abból, hogy a lemez hátsó felületének képét egy második ernyőre vetítem. Ebben az esetben láthatni, hogy az a hely, a melyen a lemez mellső felületén a téntafolt van, világos háttéren sötétnek mutatkozik annak bizonyítékául, hogy ez a hely nemhogy melegebb volna környezeténél, hanem hidegebb amannál. Ez a tünemény abban leli magyarázatát, hogy a téntafolt a fénylő platinánál sugárzás alakjában több meleget sugároz ki, de mivel az áram a lemez minden keresztmetszetéhez egyenlő mennyiségű meleget vezet, kell hogy a téntafolt helye a lemez többi részeinél kevésbé meleg legyen. Tehát a téntafolt nagyobb emissióképessége bőségesen pótolja a sugárzásnak e valamivel alacsonyabb hőmérséklete folytán beálló hiányát.

2. *A Stefan-Boltzmann-féle törvény.* Az út, mely minket az S_λ függvény megismeréséhez vezet, két részre osztható. Először összefoglaljuk az összes különböző hullámhosszal biró sugarakat és azt kérdezzük: Mikép függ a fekete test összsugárzása a hőmérséklettól? És csak azután fordulunk ahhoz a kérdéshez: Mikép van elosztva különböző hullámhosszal biró sugarak között a fekete sugárzás energiája?

Az összsugárzásra vonatkozó kérdést hosszú időn át tévesen fogták fel, a mennyiben nem voltak arra tekintettel, hogy a különböző testek különböző sugárzástörvényeket tartoznak követni és hogy csakis a fekete testet illeti az egyedüli typikus, általános törvény. Az egyes kutatók, kik tetszőlegesen kiválasztott anyagokkal dolgoztak, eltérő eredményekhez jutottak, melyeket egymással összeegyeztetni kellett. Így különféle sugárzástörvények keletkeztek. E helyen csak egy ily törvénynyel, még pedig azzal óhajtunk foglalkozni, melyet Stefan 1879-ben nem mint a fekete test sugárzástörvényét, hanem mint a «testek sugárzása törvényét» állított fel. Azon eredmények egybevetéséből, melyeket az egyes kutatók különböző anyagokon nyertek, empirikus úton jó szerencsével jutott törvényéhez, mely szerint a testek sugárzása az absolut hőmérséklet negyedik hatványával nő. Bár nem érvényes minden testre e törvény, jelentőségében sokat nyert az által, hogy BOLTZMANN 1889-ben elméleti úton azt találta, hogy a fekete testre érvényes. E törvény:

$$S = \sigma \,.\, T^4 \ldots 1)$$

Itt S jelenti a fekete test összenergiáját T absolut hőmérséklet mellett, σ egy állandó.

BOLTZMANN a MAXWELL-féle elektromágneses fényelmélet azon fontos törvényéből indult ki, mely szerint merőleges incidentia esetén valamely fénysugár a felületegységre egy olyan nyomást fejt ki, mely a sugárzásnak a térfogat egységében tartalmazott energiájával egyenlő. Ez a híres æthernyomás vagy sugárzásnyomás. BOLTZMANN e törvényből tisztán thermodynamikus megfontolásokkal mutatta ki a STEFAN-féle törvénynek a fekete testre való érvényességét.

E törvény exact igazolása mindaddig lehetetlen volt, a míg oly természetes testekre voltunk utalva, melyeknek feketeségéről helyes itéletet magunknak nem alkothattunk, ámbár van néhány test, pl. korom, platinkorom, melyek közönséges hőmérsékletnél nemcsak a látható fényre, hanem az itt főképen szereplő ultravörös sugarakra nézve teljesen feketék. Ezek a testek azonban nem alkalmazhatók sugárzó testekül, mert ezek már mérsékelt hőmérsékletnél is megbomlanak, így a korom 400°, platinkorom 600 C. foknál. Nagy haladás volt e téren az a tény, hogy 1895-ben sikerült WIEN-nek és LUMMERnek a fekete sugárzást megvalósítani. Ennek lehetősége KIRCHHOFF törvényéből vont egy egyszerű következtetésből folyik, mely azt mutatja, hogy egy zárt tér belsejében, a melyben a hőmérséklet mindenütt ugyanaz, megvan a fekete test sugárzása, azaz a felület minden pontjából kiinduló a zárt tér belseje felé tartó sugárzás teljesen olyan, mintha a felület tökéletesen fekete volna, bár közömbös az, hogy a valóságban milyen anyagból áll e felület. Az ilyen tért határoló felületen kis nyilást fúrva, abból a sugárzás szabadba jön, mely gyakorlatilag a fekete test sugárzásával teljesen azonos. *Hogy tehát a fekete sugárzást megvalósithassuk, tetszőleges anyagból álló és tetszőleges alkatú ürt állandó hőmérsékletre hozunk és belsejéből a sugárzást kis nyiláson át kiengedjük.* Az elv tehát igen egyszerű. Ha C_1 és C_2 két szabadon sugárzó test nagy illetve kis absorptióképességgel, úgy egyenlő hőmérséklet mellett C_1-nek önsugárzása nagy, C_2-é kicsiny; legyenek ezek E_1 és e_2. Ha e kettőt a T állandó hőmérséklettel biró zárt ürbe hozzuk, s így mindkettőt az ebben lévő egyenlő sugárzás találja, C_1-nek absorptiója igen nagy, s ezért a reáeső sugárzásból keveset bocsát szabadon, azaz «g_1» kölcsönzött sugárzása kicsi. Az összes belőle kiinduló sugárzás:

$$E_1 + g_1.$$

C_2-nek önsugárzása e_2 kicsiny, de mivel keveset absorbeál, azért G_2 kölcsönzött sugárzása nagy, tehát a belőle kiinduló összes sugárzás:

$$e_2 + G_2.$$

A mennyit a két test önsugárzás által veszít, annyit a kölcsönzött sugárzással pótol. Kirchhoff törvényéből pedig közvetlenül folyik, hogy minden hullámhossznál mindig érvényes a következő relatió:

$$E_1 + g_1 = E_2 + g_2.$$

Az űr ezen hatásának kisérleti igazolására Lummertől construált «izzó fazék» (Glühtopf) szolgál. Egy kis elektromos kályha ez, melyben egy porczellántégelyt vörös izzásig hevítenek. A tégely falai és feneke, valamint a kályha födője közel állandó hőmérsékleten van. A tégely fenekén egy köralakú téntafolt van rajzolva. A készülék belsejéből a födő egyik nyilásán át kilépő fénynyel a tégely fenekének képét lencse segélyével egy a horizontális irányhoz 45° alatt hajlott ernyőre vetítem, melyen egy köralakú egyenlően megvilágított fényfolt keletkezik. A téntafoltból semmi sem látszik, mert az egyenlő hőmérsékletű űrben minden test egyformán sugároz; a fehér porczellán reflexióval a reáeső sugárzás nagyobb részét visszaveti, mint ez azt erősebben absorbeáló, gyöngébben reflectáló téntafolt teszi. Bevezetve most egy hideg fémcsövet az űrbe, mely a tégely fenekét az oldalfalaktól kiinduló sugárzástól óvja, rögtön láthatni, hogy a téntafolt a sötét alapon fényesen világít. Most minden saját erejére lévén utalva, láthatni, melyik bír természetétől fogva nagyobb sugárzóképességgel. A csövet ujra kihúzva láthatni, hogy a téntafolt világosabb alapon sötétnek látszik. Ennek a tüneménynek egyszerű a magyarázata. A míg a cső be volt vezetve, csak a tégely fenekének sugárzása juthatott szabadra, az oldalfalaké ellenben nem, azért a tégely feneke jobban hült le mint az oldalfalak, tehát ezek melegebbek mint amaz. De mihelyt a csövet kihúztuk, az önsugárzásnak ereje az idegen sugárzástól eredő sugárzásnál kisebb, minthogy az idegen sugárzás magasabb hőmérsékletű testekből indul ki, mint az önsugárzás. Most már

$$E_1 - e_2 < G_2 - g_1,$$

tehát:

$$E_1 + g_1 < e_2 + G_2.$$

Kis idő mulva ujra állandó a hőmérséklet s ujra $E_1 + g_1 = e_2 + G_2$ lesz, azaz a téntafolt képe eltünik.

Ennyi az ür elvének demonstrálására, a melyen a fekete test constructiója nyugszik. Ilyen fekete testtel LUMMER és én (t. i. PRINGSHEIM) 1897-ben az összsugárzásnak a hőmérséklettől való függését vizsgáltuk. Üvegből vagy fémből sugárzó üstöket vagy vízgőzáram, vagy olvasztott salétromfürdő, vagy a legnagyobb hőmérsékletek esetében egy gázkályha által hozattak egyenlő hőmérsékletre, magát a hőmérsékletet vagy közönséges hőmérőkkel, vagy magas hőfok mérésére szolgáló hőmérőkkel vagy a LE CHATELIER-féle thermoelemmel mértük; a sugárzásmérés egy LUMMER—KURLBAUM-féle felületbolometerrel történt. Ez lényegében véve egy igen vékony platinalemez, melynek vastagsága csak 1 μ, s mely platinakorommal van feketítve, tehát a reáeső sugárzást elnyeli. Ez által kevéssel emelkedik a bolometer hőmérséklete, mely kis hőmérsékletemelkedés a platinalemez elektromos ellenállásának változásából pontosan megmérhető.

Az ellenállásmérés a WHEATSTONE-féle hiddal történik azáltal, hogy az áramkörbe iktatott rendkívül érzékeny galvanometer tűjének a bolometer megsugárzása alkalmával föllépő kitérését megfigyeljük. A kisérletek eredményei a következő táblázatban összefoglalvák:

I. Tábla.

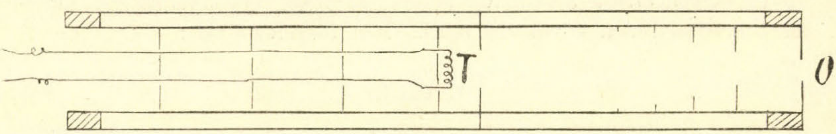
I. Abs. hőmérséklet megfigyelve	II. Reducalt kitérés	III. $\sigma \cdot 10^{10}$	IV. Abs. hőmérséklet számítva	V. T megfigyelve — $-T$ számitva
373.1	156	127.0	374.6	— 1.5°
492.5	638	124.0	492.0	+ 0.5
723.0	3320	124.8	724.3	— 1.3
745.0	3810	126.6	749.1	— 4.1
810.0	5150	121.6	806.5	+ 3.5
868.0	6910	123.3	867.1	+ 0.9
1378.0	44700	124.2	1379.0	— 1.0
1470.0	57400	123.1	1468.0	+ 2.0
1497.0	60600	120.9	1488.0	+ 9.0
1535.0	67800	122.3	1531.0	+ 4.0
		közép 123.8		

Itt az első rovat adja a fekete testnek a thermometerrel, illetve a thermoszloppal mért absolut hőmérsékletét, a második rovat adja az egyenlő mértékre redukált hozzátartozó galvanométerkitéréseket, melyek az S emittált sugárzással egyenesen arányosak. A harmadik rovat adja σ-nak minden egyes észlelésből levezetett és 10^{10}-el szorzott értékét, feltéve hogy az észlelés az 1) alatti egyenletnek eleget tesz. σ középértékével minden egyes észlelésből a

$$T = \sqrt[4]{\frac{S}{\sigma}} \ldots \ldots (1a)$$

egyenlet segítségével a T abs. hőmérséklet számíttatott ki, a melyeket a IV. rovat ad. Az V. rovat számai mutatják, hogy ezen eredményeknek a Stefan-féle törvénytől való eltérései a hőmérséklet meghatározásánál elkövetett csekély hibából megmagyarázhatók.

Ezen kisérletekkel kimutattatott a Stefan-Boltzmann-féle törvénynek a megfigyelt hőmérsékleti határokon belül való érvénye. Minthogy a Stefan-féle törvénynek Boltzmanntól thermodynamikus alapon adott levezetését kifogástalannak kell tekintenünk, azért ezeket a kisérleteket a æthernyomásról szóló Maxwell-féle hypothesis igazolásának is tekinthetjük, mely æthernyomás ujabban az üstökösök elméletében oly fontos alkalmazást nyert. 1900-ban Lebedewnek közvetlen kisérleti úton, bár nagyon subtilis kisérletek által, sikerült kimutatni ezen æthernyomást.



1. ábra.

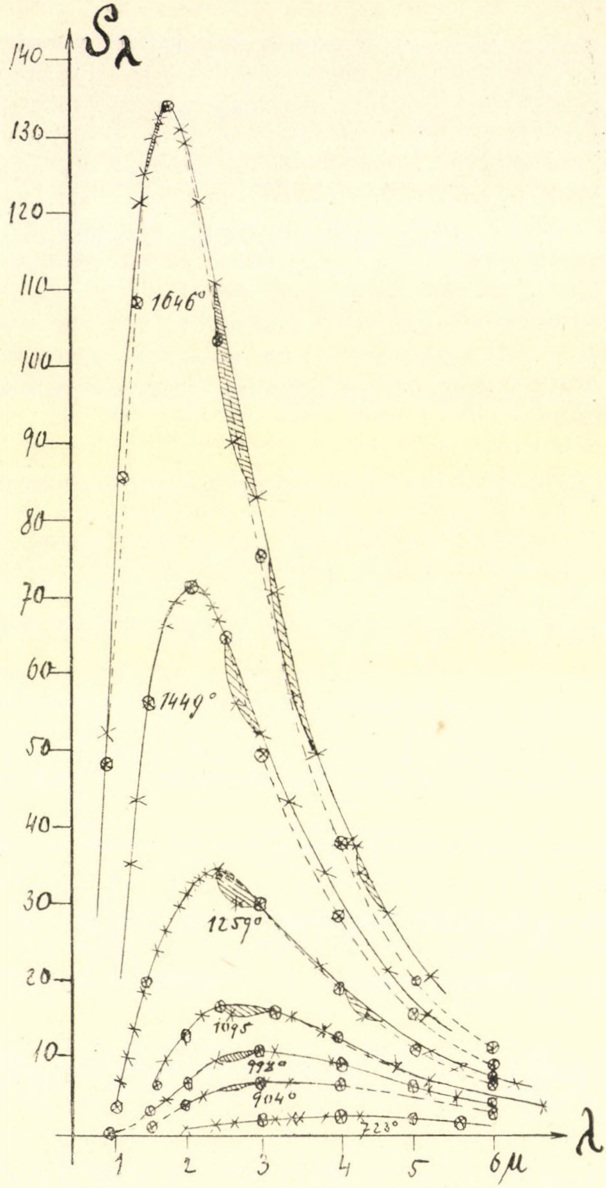
3. *Energiagörbék és energiamaximum.* Miután ily módon megállapítottuk a fekete sugárzás alaptörvényét, azon kérdés megvizsgálására tértünk át, mikép oszlik meg minden hőmérsékletre nézve a fekete test emissiója a különböző hullámhosszal biró sugarak között. E kérdés megoldását megkönnyítette nekünk az a körülmény, hogy nem kellett többé az eleintén használt, nehezen kezelhető fekete testtel kisérleteznünk, hanem az időközben Lummer és Kurlbaum által construált elektromos úton izzított és sokkal kényelmesebben kezelhető fekete testet használhattuk. Ennek sugárzó ürét szolgáltatja választófalakkal és diaphragmákkal ellátott hengeralakú porczelláncső (1-ső ábra). A fűtést erős elektromos árammal eszközöltük, mely áram e csőre borított vékony platinapléhből készült köpenyegen folyik át. A készüléket külső hőveszteség ellen egynéhány (az ábrában fel nem tüntetett) védőburok óvja. A középső keresztfal két nyilásán át egy T thermoelem drótjai vannak húzva. E thermoelem a fekete test hőmérsékletének mérésére szolgál.

Ezen testnek az O nyiláson kilépő sugárzását spectrálbolometerrel vizsgáltuk meg. Ez olyan spectrálkészülék, melynél a collimator és a megfigyelő távcső objectivei két concav ezüsttükörrel vannak helyettesítve; az oculárt pedig egy lineárbolometer pótolja. Ugyanis az ultravörös sugarak, melyeket az üveg nagy mértékben absorbeál, játszák a főszerepet, s ezért közönséges lencsék nem használhatók. A prismának is olyan anyagból kell állania, mely az ultravörös sugarakat erősen átbocsátja. Mi mészpátprismát használtunk. A rés és a fekete test között vízzel hűtött fedő van. Ha felhúzzuk ezt, akkor azon spectráltartomány sugárzása esik a bolometerre, melyre a lineárbolometer keskeny, csak 0.2 mm széles platinaszalagja van beállítva.

A létesített galvonometerkiütést megfigyeljük. A fekete testet állandó hőmérsékletnél tartva lassanként az egész spectrumon keresztül vezetjük a bolometert, mely művelet folyamán minden egyes helyzetben a fedőt felhúzzuk s minden egyes kiütés észlelése után ujra leeresztjük. Ha a galvanometer észlelt kiütéseit ordinátákúl, a prismatikus kitérésekből könnyen kiszámítható s az előbbiekhez tartozó hullámhosszakat abscissákul felrakjuk, akkor megkapjuk a fekete testnek a kérdéses hőmérséklethez tartozó energiagörbéjét. Az így talált görbék a prisma dispersióképességétől is függnek, más törőszöggel biró prismák esetén más alakkal birnának.

Hogy olyan görbéket nyerjünk, melyek mentek a prismák ezen individuális befolyásától, az észlelt görbéket az úgynevezett normálspectrumra redukáljuk, azaz egy egyszerű átszámítással olyan alakra hozzuk, melyet akkor kapnánk, ha a használt prisma normálspectrumot adna, azaz olyan spectrumot, melynél két-két spectrálszínnek egymástól való távolsága hullámhosszaik különbségével arányos. A 2-ik ábra mutatja a fekete sugárzás néhány normálgörbéjét. A kihuzott görbék mindegyike egy-egy meghatározott, az ábrában megadott hőmérsékletre vonatkozik. Ezek tehát állandó hőmérséklettel biró görbék, isothermák, melyeknek ordinátái a fekete test emissióképességével arányosak, abscissái pedig a hozzájuk tartozó s μ-ben kifejezett hullámhosszak.

E görbék felületes megtekintésénél is szemünkbe ötlenek bizonyos sajátságok. Első sorban is egyes szabálytalan behorpadások szakítják meg a görbék folytonosságát. Ennek oka abban van, hogy a levegőben lévő vízgőz és szénsav egyes meghatározott hullámhosszakat erős mértékben absorbeál s ez által gyengítik ezen spectráltartományoknak a bolometerre érkező sugárzását. Ezek az absorptiós hézagok kisérleteinkre zavarólag hatnak s hogy azokat lehetőleg kevesbítsük, egy oly szekrénybe helyeztük el a spectrobolometert, melyet vízgőztől és szénsavtól lehetőleg megszabadítottunk. Ezen elővigyázat nélkül ezek a behorpadások


S_λ
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
1646°
1449°
1259°
1095
998°
904°
723°
1
2
3
4
5
6μ
λ

2. ábra.

sokkal mélyebbek és szélesebbek lennének. Azt is látjuk, hogy a görbék sehol sem metszik egymást; minden magasabb hőmérséklethez tartozó görbe az alacsonyabb hőmérsékletű görbe fölé esik. Vagyis más szavakkal: Minden egyes hullámhossz energiája a hőmérséklet emelkedésével nő. Minden egyes görbe maximummal bir, melynek két oldalán az energia csökken. Azt a hullámhosszat, mely a maximumra esik, λ_{max}-mal, a hozzátartozó maximális emissio képességet S_{max}-mal fogjuk jelölni. Az egyes görbékre nézve ez a maximális hullámhossz a spectrum különböző helyeire esik, még pedig láthatjuk, hogy emelkedő hőmérsékletnél a kisebb hullámhosszak felé tolódik el a maximum. Továbbá az is kitünik, hogy a rövidebb hullámhosszak energiája a hoszszabbakénál a hőmérséklettel sokkal gyorsabban emelkedik. Ez megfelel annak az ismeretes tüneménynek, hogy egy izzó test alacsonyabb hőmérsékletnél vörös izzásban van, s csak a hőmérséklet emelkedésével megy át sárgas, majd fehéres izzásba.

Mielőtt még behatóbban foglalkoznánk azokkal az eredményekkel, melyeket görbéinkből kiolvashatunk, az elmélet egynéhány eredményével kell foglalkoznunk. Thermodynamikai alapon már 1893-ban fejtette ki elméleti úton WIEN W. «eltolódási» törvényét. Ez bennünket különösen érdeklő két oly törvényt tartalmaz, melyek a fekete sugárzás spectruma energiamaximumának helyzetére és intensitására vonatkoznak. E törvények elseje azt fejezi ki, hogy az energiagörbék maximális hullámhosszai époly arányban csökkennek, a minőben a fekete test absolut hőmérséklete nő. A második törvény pedig azt mondja, hogy a maximális energia az absolut hőmérséklet ötödik hatványával arányosan nő. E két törvényt a következő két formulával

$$\lambda_{max} \cdot T = A \quad \ldots\ldots (2)$$

és

$$\lambda_{max} \cdot T^{-5} = B \quad \ldots\ldots (3)$$

fejezhetjük ki, melyben A és B állandók.

A következő 2-ik táblában mutatjuk ki, hogy kisérleteink mily pontosan igazolják e két törvényt.

II. Tábla.

Absolut hő-mérséklet	$\lambda_{max.}$	$S_{max.}$	$A=\lambda_{max.}T$	$B=S_{max.}T^{-5}$	$T=\sqrt[5]{\frac{S\,max.}{B\,közép}}$	T észlelve— $-T$ számítva
621.2°	4.53	2.026	2814	2190.10^{-17}	621.3°	—0.1°
723	4.08	4.28	2950	2166.10^{-17}	721.5	+1.5
908.5	3.28	13.66	2980	2208.10^{-17}	910.1	—1.6
998.5	2.96	21.50	2956	2166.10^{-17}	996.5	+2.0
1094.5	2.71	34.0	2966	2164.10^{-17}	1092.3	+2.2
1259.0	2.35	68.8	2959	2176.10^{-17}	1257.5	+1.5
1460.4	2.04	145.0	2979	2184.10^{-17}	1460.0	+0.4
1664	1.78	270.6	2928	2246.10^{-17}	1653.5	—7.5
			közép 2940	2188.10^{-17}		

Az utolsóelőtti rovat adja azt a hőmérsékletet, melyet az észlelésekből nyert B-k középértékével (3) alatti egyenlet feloldása által kapunk, az utolsó rovat pedig az észlelt s az így számított hőmérsékletek különbségét adja. Itt is láthatni, hogy azok a kis eltérések, melyek a megfigyelés és az elmélet eredményei között felmerülnek, a hőmérséklet meghatározásánál elkövetett kis hibákra vezethetők vissza. A 2-ik törvény állandójára nézve, melyet valóban **természetállandónak** kell tekintenünk, mert értéke független a kisérletek különös feltételeitől, kisérleteink a következő értéket adnak:

$$A = 2940.$$

4. *Spectralegyenlet.* Míg Wiennek az energiamaximumra vonatkozó elméletileg talált törvénye kisérleteink által teljesen igazoltatott, addig Wiennek egy másik törvényét, melyet 1896-ban elméleti úton vezetett le, s mely az energia eloszlását adja a fekete test spectrumában, ily mértékben igazolnunk nem sikerült. A Wien-féle spectrálegyenlet, melynek levezetésében nagyon is bizonytalan kinetikus hypothesisekből indul ki, következtetésciben is kifogásolható. E törvény:

$$S_\lambda = \frac{C}{\lambda^5 e^{\frac{c}{\lambda T}}}. \tag{4}$$

Ez az egyenlet a fekete test S_λ emissióképességét λ hullámhossz és T absolut hőmérséklet függvényekép állítja elő. C és c állandók, e pedig a természetes logarithmusok alapja. A 2-ik ábra szaggatott vonalakkal adja azokat a görbéket, melyeknek menetét a kisérletek alapjául szolgáló hőmérsékletekre vonatkozólag a (4). egyenlet állítja elő. Ez az elméleti görbék a megfigyeltektől ugyan nem térnek igen el, de világos és kétségkívül systematikus eltéréseket mutatnak.

Ez az eltérés, mely a kisérlet és elmélet között mutatkozik, bennünket arra indított, hogy megváltoztatott feltételek mellett ismételjük kisérleteinket, de a második vizsgálat eredményei — melyekből fenti görbéket közöltünk — az elsővel teljes megegyezést mutattak.

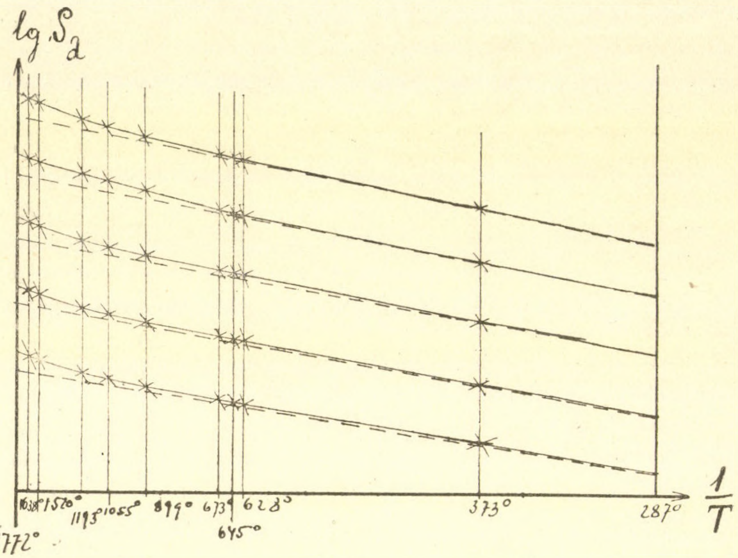
E közben azonban a Wien-féle egyenlet megerősítést nyert Paschen kisérleti és Planck elméleti kutatásai által. Paschen kisérleteihez egy általa szerkesztett fekete testet használt s első sorban azt találta, hogy eléggé alacsony hőmérsékleteknél Wien egyenlete teljes megegyezésben van a kisérlet eredményeivel. Planck az elektromos rezgések elméletéből a thermodynamika segélyével elméleti úton vezette le ezt az egyenletet és levezetésének nagymértékű pontosságot tulajdonított. Ugyanis kimondotta, hogy a Wien-féle egyenlet szükségképen következménye az entropia gyarapodása elvének, alkalmazva ezt az elektromágneses sugárzásra és ezért érvényességének határai, ha egyáltalán léteznek ilyenek, a hőelmélet második tételével esnek össze. Második kisérletünk után Paschennek egy dolgozata jelent meg, melyben bámulatos pontossággal kisérletileg kimutatja, hogy a Wien-féle egyenlet magas hőmérsékletekre is érvényes. Az elmélete ellen általunk emelt kifogást Planck ugyan jogosnak találta (1900-ban), de azért a Wien-féle egyenlet helyességére egy ujabb elméleti bizonyítást adott.

Miután kisérleteinknél az elmélet és kisérlet közti eltérések emelkedő hullámhossznál észrevehetően növekednek, a kérdést nagyobb hullámhosszak vizsgálatával óhajtottuk eldönteni. A mészpát a 7μ-nél nagyobb hullámhosszakat nagy mértékben absorbeálja s azért a spectrálbolometer mészpátprismáját egy sylvin-prismával cseréltük ki, mely különösen alkalmas olyan vizsgálatokra, melyek 12μ és 18μ által határolt spectrumrészben végeztetnek. Miután itt a Wien-féle egyenlet helyessége a lényeges kérdés, azért az erre vonatkozó munkánk eredményeit más alakban óhajtjuk összeállítani, mint eddig tettük. Feltéve, hogy helyes Wien egyenlete, akkor egyenes vonalakat kell kapnunk — mire különben Paschen utalt először —, ha egy meghatározott λ hullámhossz emissióképességének logarithmusát ordinátául, és a hőmérséklet reciprok értékét abscissául felrakjuk. Ilyen «isochromáták» alakjában vannak érzékítve kisérleteink eredményei (3. ábra); a kihúzott görbék a megfigyeléseket adják, a megszakított vonalak a Wien-féle egyenletből következő isochromátákat jelentik.

Itt az elmélet és kisérlet közti eltérések sokkal szembetünőbben lépnek fel, mint korábbi kisérleteinknél, a mennyiben az észlelt energia 60 %-áig is mennek és hibás kisérletből nem magyarázhatók. Az általunk már régebben talált eltérések ezen kisérleteink által teljesen igazoltattak és így minden kétséget kizáró módon volt beigazolva, hogy a Wien-féle egyenlet az S_λ Kirchhoff-féle függvénynek igazi alakja nem lehet. Ezt az eredményt Rubens és Kurlbaum más kisérletekkel szintén igazolták.

Az elmélet most meghajolt a kisérlet előtt. Planck egy ujabb spectrálegyenletet adott, melynek alakja a következő:

$$S_\lambda = \frac{C}{\lambda^5 \left(e^{\frac{c}{\lambda T}} - 1\right)} \quad \ldots . (5).$$



3. ábra.

Mint láthatni, a két egyenlet közti különbség külsöleg igen csekély, mert e két alak abban különbözik, hogy Planck egyenletének nevezőjének zárójelében —1 áll. De ez az 1 nem olyan ártatlan, mint a hogy látszik. A míg persze $e^{\frac{c}{\lambda T}}$ értéke nagy, pl. 100 vagy 1000 és még nagyobb, alig vagy nem is bir befolyással, vajjon levonok-e 1-et avagy nem. De minél kisebb lesz $e^{\frac{c}{\lambda T}}$, minél jobban közelíti meg e kifejezés értéke az egységet, annál szembetünőbben mutatkozik a Planck-fele 1-nek hatása és annál jobban különböznek a Planck-féle egyenletből számított S_λ sugárzásfüggvény értékei a Wien-féléből számítottaktól. Könnyü most már kimutatni, hogy a PLANCK-féle egyenlet c állandója a (2) egyenlet A állandójával egy igen egyszerű összefüggésben áll:

$$\lambda_{max} \cdot T = A.$$

Ugyanis:

$$c = 4.965\,A$$

s mivel $A = 2940$, azért

$$c = 14600.$$

Ezért a PLANCK- és a WIENféle egyenletek közti különbség λT nem igen nagy értékei mellett igen kicsiny. $\lambda T = 3000$ mellett $e^{\frac{c}{\lambda T}} = 130$. Ebben az esetben az egységnek ezen értékből való levonása S_λ értékét 1 %-al kisebb értékkel kisebbítené. Az általunk észlelt legmagasabb hőmérsékletre és a legnagyobb hullámhosszra λT értéke 30.000-ig megy, tehát $\frac{c}{\lambda T} = 0.5$ és $e^{\frac{c}{\lambda T}} = 1.65$. Ha ebből vonunk ki 1-et, úgy S_λ értéke a WIEN-féle egyenlettel számított értéknek közel $^1/_3$-ával kisebbedik. PLANCK egyenletét eleinte kisérleteink alapján állította fel, később azonban a thermodynamikával érdekes elméleti vonatkozásba hozta. Ez őt arra vezette, hogy a fekete sugárzásra vonatkozó kisérletekből levezessen értékeket egy atom absolut tömegére és az elektromos elemi mennyiség nagyságára, mely értékek más alapon talált számokkal jól egyeznek.

1901-ben PASCHEN szintén közölt ujabb kisérleteket, melyek szerint ő a PLANCK-féle egyenletet ép oly pontossággal találja helyesnek, mint ezelőtt a WIEN-félét találta ilyennek.

Így végre teljes harmonia keletkezett kisérlet és elmélet között. A PLANCK-féle egyenlet oly jól egyezik meg a tapasztalattal, hogy legalább igen nagy közelítéssel a KIRCHHOFF-féle függvény mathematikai kifejezésének tekinthető. Lefolyását a 2. ábra görbéi állítják elő.

Így éretett el az a czél, melyet KIRCHHOFF egykor a kutatásnak tűzött volt ki. Kérdés, hogy vagyunk azzal a reménynyel, melynek KIRCHHOFF adott kifejezést akkor, midőn kimondotta, hogy csak ezen czél elérése után fog törvénye egész termékenységében mutatkozni? Jelenleg az az idő, mely a sugárzástörvények megállapítása óta lefolyt, még sokkal rövidebb, semhogy ezen új megismerés összes consequentiáit levonni lehetett volna.

A sugárzástörvények alkalmazása.

1. *Sugárzáson alapuló hőmérsékleti skála.* Ez ideig a sugárzástörvények legfontosabb alkalmazása a magas hőmérsékletek mérésére vo-

natkozik. Miután az alacsony hőmérsékletek mérésénél használatos hőmérsékleti skálák a magas hőmérsékletek meghatározásánál nem használhatók, eddig e téren a mérés alapjául szolgáló megbizható alapot nélkülöztük.

Az absolut, Sir W. Thomson által definiált thermodynamikus hőmérsékleti skála csak elméleti jelentőséggel birt, a mennyiben a gyakorlatban a hőmérséklet tudományos meghatározása a gázok kiterjedésén alapul. Igen magas hőmérsékletek esetén a gázthermometer alkalmazása nagy nehézségekkel jár olyannyira, hogy ez ideig 1150° C-nál magasabb hőmérsékletet gázthermometerrel exact módon megmérni még nem sikerült. Igaz ugyan, hogy egyéb thermometrikus módszerekkel, pl. a thermoelektromossal az említett hőmérsékletnél sokkal magasabbak megmérhetők igen nagy pontossággal, de ezeknek skálájuk egy tapasztalati formulával extrapolatió utján van a gázthermometrikus skálához kötve. Azonkívül az ily alapu kisérleti meghatározás pontosságának határt szab egyrészt a használt fémek olvadáspontja, másrészt még az a körülmény is, hogy magas hőmérsékletnél az isolatorokul használt anyagok az elektromosság jó vezetőivé válnak; ennek következtében az elektromotoros erő magas hőmérsékletnél való meghatározása bizonytalan lesz. A magas hőfokok meghatározása terén tehát tényleg nélkülöztünk használható mérési módszert; 1150 C foknál magasabb hőmérsékletek adatai eddig bizonytalanok voltak és a mérés maga csakis extrapolatión alapult. Minthogy a hőmérséklet legtermészetesebb és legközvetlenebb hatása a sugárzás, a magas hőmérsékletek meghatározásánál mutatkozó hiányokat pótolni a sugárzástörvények vannak első sorban hivatva.

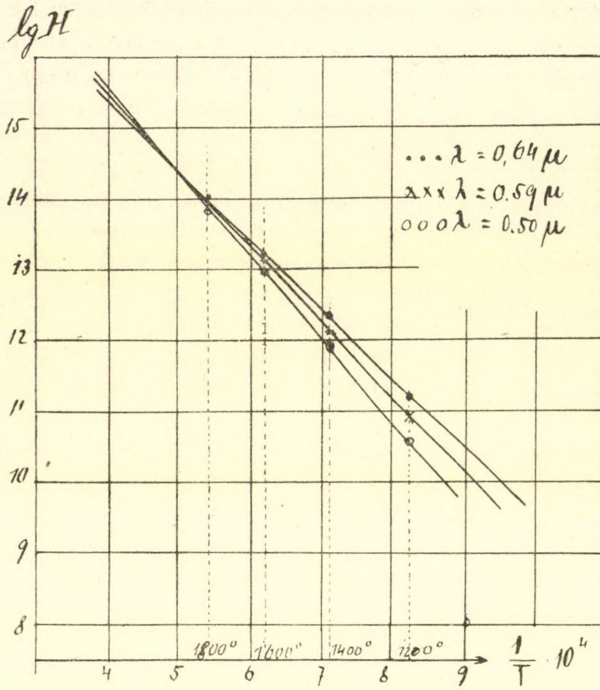
Eddig kerestük a sugárzástörvényeket, vagyis kerestük azon ismeretlen vonatkozásokat, melyek a fekete sugárzás és a thermometrikus skálával megmért hőmérséklet között felmerül. Minthogy már ismerjük a sugárzástörvényeket, fordítva járunk el és keressük a megmérhető sugárzásból az ismeretlen, még más úton meg nem határozott hőmérsékletet. Az 1), 2) és 3)-al jelölt egyenleteinket a hőmérséklet mérésének alapjául vehetjük, mert σ, A és B-vel jelölt állandójuk értékeit meghatároztuk oly módon, hogy a hőmérsékletet a gázthermometrikus skálával mértük. Ha tehát hőmérséklet meghatározására akarjuk e három törvényt felhasználni, kell hogy mindaddig, míg olyan határok között maradunk, melyek között a gázthermometrikus skála használható, e három törvény megegyező eredményeket adjon. Minket főkép az a kérdés érdekel, hogy abban az esetben, a melyben e határokon túl terjeszkedünk, megbizható eredményekhez jutunk-e? A sugárzástörvények nemcsak a kisérletek eredményei, hanem a fekete sugárzás és az absolut hőmérséklet közötti vonatkozások oly exact módon elméleti úton is vannak megokolva, hogy jogosítva vagyunk e törvényeket *természet-törvényeknek* tekinteni, melyek tehát nemcsak arra a hőmérsékleti közre érvényesek, melyre nézve kisérletileg beigazoltattak, hanem érvényesek minden hőmérsékletre. Ha helyes e feltevés, úgy bármily magas is legyen a fekete test hőmérséklete, kell hogy mindhárom törvény erre vonatkozólag egyenlő eredményeket adjon.

A fentebb említett három törvényen kívül még tetszőleges számú más vonatkozás is létezik, melyek a fekete sugárzás és az absolut hőmérséklet között felmerülnek, s melyek mindegyike alapja egy ily mérési módszernek; ezek az összefüggések a PLANCK-féle spectralegyenletből adódnak.

Ezek között különösen alkalmas az elmélettel is támogatott *spectrál-photometrikus* módszer. Eddig megismertük az isochromátákat vagyis azon görbéket, melyek valamely hullámhossz sugárzása intensitásának a hőmérséklettel való változását grafikusan feltüntetik. Míg a látható spectrumon belül maradunk, nem szükséges az energiát spectrálbolometerrel mérnünk, ha e görbéket előállítani akarjuk, hanem elegendő, ha az intensitást spectrálphotometerrel mérjük, mint ezt elsőnek PASCHEN és WANNER tette. A spectrálphotometer rése elé téve a fekete testet, ugyanazon színre vonatkozó intensitását egy tetszőlegesen választott állandó fényforrásáéhoz viszonyítva különböző hőmérsékletek mellett megmérjük. Ha e mérések eredményeit ujra úgy rakjuk fel, hogy a fényesség logarithmusa $\left(\frac{1}{T}\right)$ függvénye legyen, úgy előre látható, hogy e görbék egyenes vonalak lesznek. Ugyanis a látható spectrumon belül λ értéke oly kicsiny, hogy λT értéke $T = 5000°$-nál magasabb hömérsékletnél haladja csak túl a 3000-et s ezért a PLANCK-féle egyenletnek megfelelő isochromata csak kevéssel tér el ennek a WIEN-féle egyenlettől követelt egyenes vonalú alakjától. A 4-ik ábra adja néhány hullámhosszra a fekete test spectrálphotometrikus isochromátáit, melyek tényleg egyenesek. Ezekből a PLANCK-féle egyenlet c állandója is adódik s középértékben $c = 14580$, mi a bolometrikus úton nyert $c = 14600$ értékkel jól egyezik.

Miután ezek szerint föltehetjük, hogy ezen isochromáták 5000°-nál magasabb hőmérsékletnél is egyenesek, azért ezeket a fekete test hőmérséklete meghatározásánál oly esetekben is alkalmazhatjuk, mely esetekben a gázthermometrikus skála már nem alkalmazható. Egy hullámhossz intensitását — ha előbb isochromátáját meghatároztuk — spectrálphotometerrel megmérjük és megkeressük a kérdéses isochromata azt a pontját, melynek ordinátája a megmért fényesség logarithmusával egyenlő. E pont abscissája adja azután a fekete test hőmérsékletének reciprok értékét.

Az említett három módszeren kívül e negyediket azért említettük fel, hogy a fekete test hőmérsékletét a lehető legmagasabb hőfokoknál meghatározva, a különböző módszerek eredményeit egymással összehasonlíthassuk.



4. ábra.

E czélból egy oly fekete testet állítottunk elő, mely magasabb hőmérsékletnél használható, mint az előbb említettek. Czéljainkra erős elektromos árammal izzított szenet használtunk. A sugárzó ürt egy 34 cm hosszú, 1 cm belső átmérővel és 1.2 mm falvastagsággal biró széncső alkotta, melybe egy szorosan járó széndugó illeszkedett. E csővet, melyhez az áramot két szorító csavaron át vezettük, több, asbest, chamotte és szénből álló cső vette körül, részben azért, hogy a fejlesztett hőt veszteségek ellen óvjuk, részben pedig azért, hogy magát a sugárzó ürt képező belső széncsövet elégéstől megóvjuk. A szorító csavarokhoz vastag rézlemezeket erősítettünk, hogy azok olvadás ellen óva legyenek.

A méréshez szükséges készülékek: felületbolometer, spectrálbolometer és spectrálphotometer úgy állítattak föl egymás mellé, hogy a fekete test, mely síneken gördülő kocsin volt elhelyezve, könnyen egyik műszertől a másikhoz volt vihető.

A következő táblázatban időrendben közöljük egy észlelési sorozat eredményeit. Ebben minden hőmérsékleti adat 5°-ra van kikerekítve. Az 1, 3 és 6. sorszám alatti értékek a spectrálphotometrikus módszerrel; 2, 4 és 7 alattiak felületbolometerrel az 1-ső egyenletből (első törvényből); az 5 és 8 alattiak pedig spectrálbolometerrel az energiamaximum intensitásából (3-ik törvény) nyerettek. Az energiamaximum helyzetéből a 2-ik egyenlettel meghatározott hőmérséklet eredményeit nem közöltük, mert megbízhatóság dolgában e módszer a többi mögött marad.

III. Tábla.

Sorszám	Abs. hőm.	Módszer
1	2310°	Fényesség
2	2325	Összsugárzás
3	2320	Fényesség
4	2330	Összsugárzás
5	2330	Energiamaximum
6	2330	Fényesség
7	2345	Összsugárzás
8	2320	Energiamaximum

A különböző módszerekkel talált hőmérsékleti adatok oly jól egyeznek, hogy az alapul vett sugárzástörvények érvénye 2300° absolut hőmérsékletig igazolva van. A fölmerült kis eltérések részben az elkerülhetetlen észlelési hibákból, részben a szén hőmérsékletének állandó ingadozásából magyarázhatók.

Miután a kisérleteinken alapuló sugárzástörvények levezetésénél gázthermometrikus hőmérsékleti skálát használtunk, a mennyiben a műszerek állandói erre vonatkoznak, joggal következtethetjük, hogy a szén hőmérsékletére éppen olyan értéket találtunk, minőt nyernénk olyan esetben, ha egy ideális, tehát teljesen hibamentes gázthermometerre mértük volna meg. *Ezzel a módszerrel a hőmérséklet exact meghatározásának határa 1000°-al bővült.*

Ebben az értelemben a gázthermometria és a fekete test sugárzásmérése egyenjogú módszerek, melyek egymást gyakorlati vonatkozásban kiegészítik, a mennyiben az egyik az alacsony, a másik magas hőmérsékletek esetén jut érvényre.

De sokkal következetesebb és logikailag is egyszerűbb, ha teljesen eltekintünk a gázthermometrikus skálától és az absolut hőmérsékletet közvetlenül a fekete sugárzással definiáljuk. Ily módon egy új, *sugárzáselméleten alapuló hőmérsékleti skálához* jutunk, mely absolut époly értelemben mint a thermodynamikus skála, minthogy a fekete sugárzás teljesen független egy bizonyos anyag természetétől és csak a tiszta hősugárzás stabilis egyensúlyi állapota.

Ha az absolut hőmérsékletet úgy definiáljuk, hogy arányos az összsugárzás negyedik gyökével, és még tekintettel vagyunk arra a konvenczionalis megállapodásra is, hogy a víz fagy- és forráspontja közti hőmérsékletkülönbség 100°, úgy az új skála adatai megegyeznek a thermodynamikus és a gázthermometrikus skála adataival.

Az elmélet is támogatja ezt a kisérleti eredményt, a mennyiben Boltzmann a hőelmélet második főtétele következménye gyanánt vezette le a Stefan-féle törvényt. Ha ezeknek az összefüggéseknek az alappontokra való vonatkozásait elkerülni óhajtjuk a végből, hogy e definitiót egy tetszőleges anyag tulajdonságaitól függetlenné tehessük, akkor pl. megállapodhatunk abban, hogy egy köbczentiméterben lévő egységnyi absolut hőmérsékletü fekete sugárzás energiája meghatározott értékkel bir. Ha ez az érték $7.06 \,.\, 10^{-15}$ erg volna, úgy Kurlbaum szerint az új skála hőfokai a Celsius-félével egyenlők lesznek. A sugárzáselméleti skála a régebbi thermodynamikus alapon definiált hőmérsékleti skála fölött azzal az előnnyel bir, hogy nemcsak elméleti jelentősége van, hanem értelmezése alapján a gyakorlati mérésnél is használható.

2. *A hőmérséklet mérése sugárzás segélyével.* A sugárzás elméleti skálájával közvetlenül csakis a fekete test hőmérséklete határozható meg ép úgy, mint a hogy egy hőmérővel csakis e hőmérő hőmérsékletét határozhatjuk meg. Más testek pl. valamely a gyakorlatban használt olvasztókemencze hőmérsékletének meghatározásánál arra a helyre, melynek hőmérsékletét épp meghatározni akarjuk, vagy egy a fekete test elve szerint construált sugárzó ürt kell hoznunk, vagy egy a fekete testtel calibrált más készüléket pl. thermoelemet is használhatunk.

Olyan esetekben, a melyekben nem kivántatik igen nagy pontosság, ilyen segédeszközök nélkül a nem fekete testek sugárzásából is közvetlenül következtethetünk azok hőmérsékletére. Ez különösen olyan testeknél fontos, a melyeknél a fent említett segédeszközök nem használhatók.

Hogy ilyen következtetések megengedhető voltára mértéket kapjunk, egy erősen reflectáló — tehát a fekete testtől erősen elütő — anyag sugárzástulajdonságait vizsgáltuk. Ilyenül a fényesített platinát választottuk. Elektromos árammal izzított vékony platinalemeznek, mint sugárzó testnek, hőmérsékletét thermoelemmel igen pontosan megmértük s energiagörbéit a spectrálbolometer segélyével ép oly módon állítottuk elő, mint a fekete testét. PASCHEN eredményeivel megegyező módon adódott — bár egyes esetekben annak méréseitől erős eltérések mutatkoztak — hogy a 2) egyenlet

$$\lambda_{max} \cdot T = \text{constans}$$

a fénylő platinára is érvényes: az állandó értéke 2630, míg a fekete test esetében 2940 volt.

Ha tehát valamely test sugárzása tulajdonságai a fénylő platina és a fekete test sugárzása tulajdonságai közé esik, más szóval ha a kérdéses test a feketénél kevésbé fekete, de nem reflectál oly erősen mint a platina, joggal feltehetjük, hogy az illető testre nézve ($\lambda_{max} \cdot T$) szorzat értéke 2630 és 2940 közé esik. Ha e kérdéses test energiagörbéjét előállítjuk és az energiamaximum λ_{max} hullámhosszát meghatározzuk, úgy az illető test hőmérsékleténél a valódinál nagyobb értéket kapunk, ha $T = \frac{2940}{\lambda_{max}}$, és alacsonyabbat, ha $T = \frac{2630}{\lambda_{max}}$ helyettesítéssel élünk. A kérdéses test valódi hőmérséklete e két szélső érték közzé esik. Föltételezve az alább felsorolt fényforrásokról, hogy a kifejtett feltételeket kielégítik, meghatároztuk maximális és minimális hőmérsékletüket, melyek közzé valódi hőmérsékletük esik. Az adatok normális izzó állapotjukra vonatkozik.

IV. Tábla.

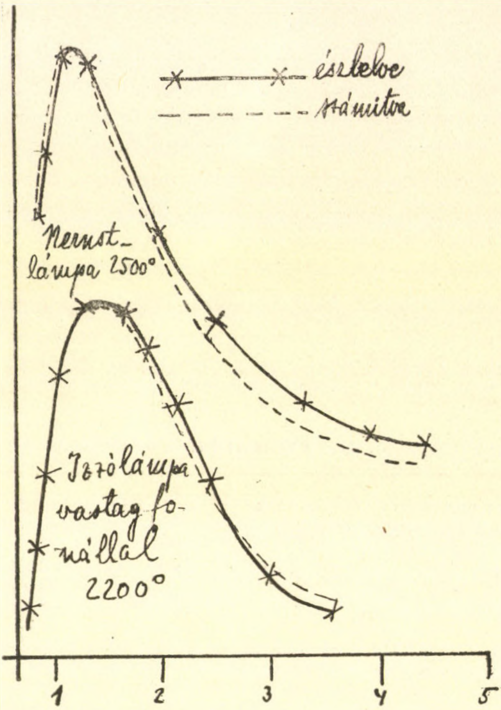
Fényforrás	λ max.	T max.	T min.
Ivlámpa	0.7μ	4200° abs.	3750° abs.
Nernstlámpa	1.2	2450	2200
Gázizzó	1.2	2450	2200
Izzólámpa	1.4	2100	1875
Gyertya	1.5	1960	1750

A NERNST-féle lámpát és a vastagfonálú izzólámpát más izzás állapotban is megvizsgáltuk, melyeket az áramerősséggel és feszültséggel definiáltunk és állandóan megtartottunk.

Az összes megvizsgált fényforrásoknál az energiagörbék a maximum környéken nagyon megközelítik a fekete testét.

Ennek igazolására egy fekete testnek a mellékelt ábrában megadott hőmérséklete mellett észlelt és számított görbéit mutatjuk be, melyek a NERNST-féle lámpa és a vastagszálú izzólámpa egy bizonyos izzás állapotára vonatkoznak. Utóbbinál az észlelt görbe az elméleti alá esik, minek oka — mint ezt speciális vizsgálatok mutatták — az üvegburok absorptiója.

Az a körülmény, hogy ezen hőmérsékletmeghatározás határai egymástól távol esnek, maga után vonja a legnagyobb valószinűséggel azt a tényt, hogy e határok közé esik az észlelt test valódi hőmérséklete. Itt még azt a tényt is kell tekintetbe vennünk, hogy nagyobbrészt olyan fényforrások szerepelnek, melyeknek hőmérsékletére vonatkozólag eddig más úton, mint sugárzás útján még közelítő adatot sem kaptunk.



5. ábra.

Mily alkalmazásra képes e módszer, erre nézve Harkányi kisérlete reményteljes perspectivát nyujt, a ki ily módon néhány állócsillag hőmérsékletét számította ki. Vizsgálatának legfontosabb eredménye abban van, hogy az állócsillagok hőmérsékletének értékét nagyon túlbecsülték, s hogy a legnagyobb hőmérsékletű állócsillag hőmérséklete a Napunkét, mely 6000° körül van, legfeljebb csak néhány ezer fokkal haladhatja túl.

Módszerünk hibaforrása kisebb lenne, ha eldönteni tudnók minden esetben, vajjon a vizsgálandó test sugárzás-tulajdonságaiban jobban hasonlít-e a fekete testhez, vagy a fénylő platinához. Eddig néhány oly módszert érintettünk, melyek alkalmasak lehetnek e kérdés eldöntésére, de eddig a kivitelig még nem jutottunk.

De a nélkül, hogy a sugárzó test feketeségét ismernők, az említett hibaforrásokat több esetben kisebbíthetjük a spectrálphotometrikus módszer alkalmazása által. Ezt a módszert, melyet már WANNER az ívlámpa és zirkonlámpa hőmérsékletének meghatározására használt akkor, mielőtt elvei kellő módon kifejtve és megállapítva lettek volna, mi tovább fejlesztettük az által, hogy a fénylő platina sugárzását összehasonlításul vizsgálatainkba bevontuk. Mi egy izzó platinalemez hőmérsékletét egyrészt a thermoelemmel, másrészt a fekete test isochromátikus módszerével határoztuk meg. Helyes értékek csak úgy várhatók, ha a platina sugárzása a fekete testével egyezik. Ezen módszerrel szükségkép a kelleténél kisebb értékhez kell jutnunk. A platina valódi és photometrikus módon meghatározott hőmérséklete közötti különbség 1100 abs. foknál kb 42°, 1875°-nál 110°. A hőmérsékletmeghatározás e hibái olyan testeknél, minő a platina, mely tehát legjobban tér el a fekete testtől, nem igen nagyok. Annál kisebbek lesznek olyan testeknél, melyek közelebb esnek a fekete testhez. E módszerek a technikában használt olvasztókemenczék esetében nagyon jó értékeket adhatnak, a mennyiben ezeknél van legjobban megvalósulva a fekete sugárzás elve. A technikában használatos legujabb optikai pyrometerek alapja e módszer. Ezeket jelenleg a fekete test sugárzása alapján 5000°-ig pontosan calibrálhatjuk.

Nem fekete testeknél mindkét módszert együttesen használhatjuk. Ezelőtt egy vastagfonálú izzólámpát voltokban és ampèrekben adott különböző hőmérsékleteinél bolometrikus módon megvizsgáltuk és mindenkori hőmérsékletét e két határérték közé foglaltuk. Később ugyanezt a lámpát ugyanazon hőmérsékleteknél spectrálphotometrikus módon megvizsgáltuk s ezáltal egy oly minimális hőmérsékletet találtunk, mely a valóditól nem igen lehet különböző. A nyert adatokat a következő táblázat mutatja :

V. Tábla.

Izzás állapot	Spectral-photometer T	Spectralbolometer T max.	Spectralbolometer T min.
9.46 Amp. 12.5 Volt	1770° abs.	1840° abs.	1640° abs.
12.87 Amp. 16.3 Volt	2050	2100	1879
25.12 Amp. 20.0 Volt	2200	2300	2055

Minthogy az izzólámpa feketeségéről semmit sem tudunk, csak annyit mondhatunk, hogy valódi hőmérséklete a bolometrikus T_{max} és a photometrikus módon nyert érték közé esik. Ha a két érték közepét veszszük, biztosak lehetünk abban, hogy az elkövetett hibák 35°, 27° és 50°-nál nem lehetnek nagyobbak.

Ezek a kisérletek, melyeknek czélja a sugárzástörvényeket a hőmérsékletmeghatározásra alkalmasan felhasználni, még a kezdet stádiumában vannak ugyan, de alapos kilátás van, hogy a közel jövő szép eredményeket mutathat fel.

Pringsheim végűl egy harmadik pontban érinti a sugárzástörvényekből folyó azon következtetéseket, melyek arról adnak felvilágosítást, hogy milyen irányban tökéletesítendők a mesterséges fényforrások. Erre e helyen már nem terjeszkedhetünk ki.

Fordította *Tass Antal.*

A Mathematikai és Physikai Társulat XI. tanulóversenye.

A f. évi október hó 8-ikára hirdetett tanulóversenyre Budapesten 46, Kolozsvárt 7 középiskolai érettségi vizsgálatot tett versenyző jelentkezett. A verseny mindkét helyen zárt helyiségben, a Társulat számos tagjának felügyelete és ellenőrzése mellett teljesen rendben folyt le, és Budapesten 6^h30^m-kor, Kolozsvárt 5^h45^m-kor ért véget. A verseny lefolyásáról mindkét helyen jegyzőkönyv vétetett fel, melynek tanusága szerint a tételek kidolgozására engedett négy órai idő alatt Budapesten 38, Kolozsvárt 6 dolgozat adatott. Noha tehát a mult évhez képest a versenyzők száma csak egygyel nőtt, a beadott dolgozatok száma az idén 20-szal szaporodott, a mi mindenesetre a verseny külső sikerének jele.

A tanulóverseny tételei a következők voltak:

1. Bebizonyítandó, hogy ha valamely körbe írt ötszögben a szögek egymással egyenlők, akkor egyenlők az oldalok is.

2. Bebizonyítandó, hogy az

$$1\,.\,x_1+2x_2+\cdots+nx_n=a$$

határozatlan egyenlet pozitiv és egész számokból álló megoldásainak száma ugyanakkora, mint az

$$1\,.\,y_1+2y_2+\cdots+ny_n=a-\frac{n(n+1)}{2}$$

egyenlet nem negativ egész számokból álló megoldásainak száma. Az a pozitiv egész számot jelent.

3. Legyenek A_1A_2 és B_1B_2 az O középponttal biró körnek átmérői; meghatározandó és geometriailag ábrázolandó ama P pontok összesége, a melyekre nézve az

$$A_1P>OP,\quad A_2P>OP,\quad B_1P>OP,\quad B_2P>OP$$

egyenlőtlenségek egyszerre állanak fenn.

A dolgozatok az ellenőrző tagok jelenlétében lepecsételtettek és az elnökség elbirálásukra bizottságot küldött ki, melynek jelentése a következő:

Jegyzőkönyv

a XI. mathematikai tanulóversenyen beadott dolgozatok megbirálása végett 1904 november 2-án összehivott bizottságnak üléséről, melyen megjelentek: Beke Manó dr., Eberling József, Kőnig Gyula dr., Kopp Lajos dr., Kövesligethy Radó dr., Kürschák József, Rados Gusztáv, Szekeres Kálmán dr., Rátz László, Szijártó Miklós.

A bizottság a Budapesten készített 38 dolgozatnak és a Kolozsvárról utólag beérkezett 6 dolgozatnak, összesen 44 dolgozatnak beható átvizsgálása után az I. díjat *Riesz Marcel*nek, ki a győri áll. főreáliskolában Dsida Ottónak volt a tanítványa, a II. díjat pedig *Fuchs István*nak itélte oda, ki a beregszászi állami főgymnasiumban Telkes Sándornak volt tanítványa, mivel e két tanuló mind a három feladatot teljesen megoldotta.

A bizottság továbbá dicséretre méltónak találta három tanulónak a dolgozatát, a kik szintén megoldották mind a három feladatot, de egyes feladatok megoldásánál némi hézagok mutatkoznak. E három dolgozatot a következő tanulók adták be: *Fodor Henrik,* ki a beregszászi állami főgymnasiumban Telkes Sándornak volt tanítványa, *Földes Rezső,* ki a budapesti V. ker. áll. főreáliskolában Szekeres Kálmán dr.-nak volt tanítványa és *Gáspár József,* ki a budapesti VIII. ker. állami főgymnasiumban Lévay Ede dr.-nak volt a tanítványa.

Budapesten, 1904 november hó 2-án.

Szijártó Miklós, mint a biz. előadója. *Kőnig,* biz. elnök.

Beke Manó, *Kürschák József,*
Eberling József, *Rados Gusztáv,*
Kopp Lajos, *Szekeres Kálmán,*
Kövesligethy Radó, *Rátz László*
bizottsági tagok.

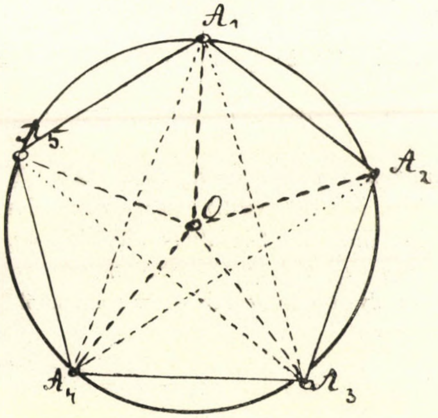
A f. évi november hó 10-ikén tartott választmányi ülés e jelentést tudomásul vette és a javaslathoz egyhangúlag járulván ezt hatarozattá emelte.

Ennek alapján a nyomban tartott rendes ülés kezdetén kihirdettetett a verseny eredménye, mire báró Eötvös Loránd elnök a nyerteseknek: *Riesz Marcel* a győri áll. főreáliskolán Dsida Ottó tanítványának és *Fuchs István* a beregszászi áll. főgymnasiumon Telkes Sándor tanár növendékének meleghangú, volt tanárukat is megtisztelő szavakkal átnyujtotta a jutalmat.

A Mathematikai és Physikai Társulat XI. versenyén b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozatok.*

I. Riesz Marcel dolgozata.

1. Az ötszög csúcsait A_1, A_2, A_3, A_4, A_5-tel jelöljük, a kör középpontját pedig O-val. A feltétel szerint az $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_5$,



$A_4A_5A_1$ kerületi szögek egyenlők, tehát a hozzájuk tartozó A_1A_3, A_2A_4, A_3A_5, A_4A_1 húrok is azok, a miből viszont az A_1OA_3, A_2OA_4, A_3OA_5, A_4OA_1 középponti szögek egyenlősége is következik. Ezeket az egyenlő középponti szögeket α-val jelölöm. Másrészt

$$A_5OA_1\sphericalangle = 360°-(A_1OA_3\sphericalangle+A_3OA_5\sphericalangle) = 360°-2\alpha$$
$$A_1OA_2\sphericalangle = 360°-(A_2OA_4\sphericalangle+A_4OA_1\sphericalangle) = 360°-2\alpha,$$

tehát

$$A_5OA_1\sphericalangle = A_1OA_2\sphericalangle.$$

---

* A dolgozatok változtatás és javítás nélkül közöltetnek. *Szerk.*

Mivel pedig egyenlő középponti szögekhez egyenlő húrok tartoznak, azért

$$A_5A_1 = A_1A_2.$$

Az ötszög többi oldalának egyenlősége hasonlóan bizonyítható, tehát

$$A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_1.$$

Megjegyzendő még, hogy az iménti bizonyítás bármely páratlan oldalszámú sokszögre alkalmazható.

2. Ha az $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ értékrendszer eleget tesz az

$$1 \,.\, x_1 + 2 \,.\, x_2 + \cdots + n \,.\, x_n = a \tag{1}$$

egyenletnek, akkor az $(x_1—1,\ x_2—1, \ldots x_n—1)$ értékrendszer eleget tesz az

$$1 \,.\, y_1 + 2 \,.\, y_2 + 3 \,.\, y_3 + \cdots + n \,.\, y_n = a - \frac{n(n+1)}{2} \tag{2}$$

egyenletnek. Ugyanis ha 1) fennáll, akkor

$$1 \,.\, (x_1-1) + 2(x_2-1) + \cdots + n(x_n-1) =$$

$$= 1 \,.\, x_1 + 2x_2 + \cdots nx_n - (1+2+\cdots n) = a - \frac{n(n+1)}{2}.$$

Azonkívül, ha minden x pozitiv egész szám, vagyis $\geqq 1$, akkor a megfelelő $(x—1)$ értékek is nem negativ egész számok lesznek s így mindegyikük $\geqq 0$. Tehát minden a feladatnak megfelelő $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ rendszernek megfelel egy $(y_1, y_2 \ldots y_n)$ értékrendszer.

Másrészt, ha van olyan nem negativ egész számokból álló $(y_1, y_2 \ldots y_n)$ értékrendszer, mely az

$$1 \,.\, y_1 + 2 \,.\, y_2 + \cdots n \,.\, y_n = a - \frac{n(n+1)}{2} \tag{2}$$

egyenlőséget kielégíti, akkor az $y_1+1,\ y_2+1, \ldots y_n+1$ számok összesége eleget tesz az

$$1 \,.\, x_1 + 2 \,.\, x_2 + \cdots + n \,.\, x_n = a$$

egyenletnek. Ugyanis

$$1 \,.\, (y_1+1) + 2(y_2+1) + \cdots + n(y_n+1) = 1 \,.\, y_1 + 2 \,.\, y_2 + \cdots n \,.\, y_n +$$

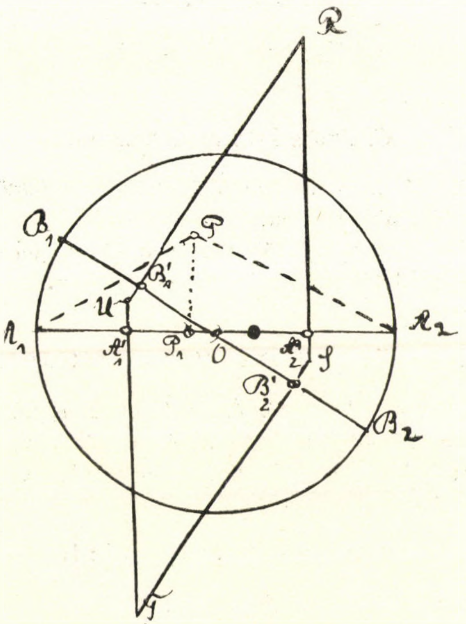
$$+ (1+2+\cdots n) = a - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = a.$$

Azonfölül, ha y nem negativ egész szám, vagyis $\geqq 0$, akkor a megfelelő $x = y+1$ pozitiv egész szám, vagyis $\geqq 1$.

Így tehát minden a feltételeknek eleget tévő $(y_1, y_2 \ldots y_n)$ értékrendszernek megfelel egy a feltételeknek eleget tévő $(x_1, x_2 \ldots x_n)$ értékrendszer.

A két eredményt összefoglalva látjuk, hogy az első egyenlet minden megoldásának, a második egyenletnek egy és csak egy megoldása felel meg, tehát a megoldások száma egyenlő.

3. A tetszőleges P pontnak az A_1A_2 átmérőre vonatkozó vetületét P_1-gyel jelöljük.



Ha a Pythagoras-féle tételt alkalmazzuk, akkor látjuk, hogy az $A_1P > OP$, $A_2P > OP$ egyenlőtlenségek fennállásának szükséges és elegendő feltétele az $A_1P_1 > OP_1$ és $A_2P_1 > OP_1$ egyenlőtlenségeknek a fennállása. Ha tehát az OA_1 és OA_2 távolságoknak felezéspontjait A'_1 illetőleg A'_2-tel jelölöm, akkor a P_1 pontnak az A'_1 és A'_2 pontok közé kell esnie. A miből viszont következik, hogy a P pont az A_1A_2 átmérőre az A'_1 és A'_2 pontokban merőlegesen állított egyenesek között fekszik.

Hasonlóan az OB_1 és OB_2 távolságok felezéspontjait B'_1 és B'_2-tel jelölve, P az eme pontokban a B_1B_2 átmérőre merőlegesen állított egyenesek közé esik.

Tehát a feladat megoldásának szükséges és elegendő feltétele, hogy P-t a 4 említett merőlegesből alkotott parallelogramm tartalmazza.

Bebizonyítható még, hogy ez az $RSTU$ egyenközény rombus.

Ugyanis irhatunk bele az $OA'_1 = OA'_2 = OB'_1 = OB'_2$ küllővel kört, tehát az egyenközény átlói egyszersmind az egyenközény szögeit felezik. Mivel pedig pl.

$$URS\sphericalangle = UTS\sphericalangle,$$

azért is e szögeket felezve

$$TRS\sphericalangle = RTS\sphericalangle$$

és így

$$RS = ST = TU = UR.$$

II. Fuchs István dolgozata.

I. Bebizonyítandó, hogy ha valamely körbe írt ötszögben a szögek egymással egyenlők, akkor egyenlők az oldalak is.

1. Legyen $A_1A_2A_3A_4A_5$ oly ötszög, melynek szögei egyenlők. A_2A_3 és A_5A_4 meghosszabbításai messék egymást B-ben. Az így keletkezett $BA_3A_4\triangle$ egyenlőszárú, mivel

$$BA_4A_3\sphericalangle = 180^\circ - A_3A_4A_5\sphericalangle = 180^\circ - A_4A_3A_2\sphericalangle = BA_3A_4\sphericalangle.$$

Ennélfogva $BA_3 = BA_4$. Az $A_5BA_3\triangle$ és $A_2BA_4\triangle$ egymáshoz hasonlók, mert B-nél fekvő szögük közös, A_2-nél és A_5-nél fekvő szögeik pedig, mint közös húrral biró kerületi szögek, egyenlők. A két háromszög hasonlóságából következik, hogy

$$A_2B : A_5B = A_4B : A_3B = 1 : 1,$$

vagyis, hogy

$$A_2B = A_5B.$$

De ekkor kell, hogy $A_2A_3 = A_2B - A_3B$ és $A_5A_4 = A_5B - A_4B$ is egyenlők legyenek egymással. Ámde ugyanígy kimutathatjuk, az ötszög bármely két oldalának egyenlőségét, miért is az ötszög összes oldalai egyenlők.

2. $A_3A_4A_2\triangle \cong A_4A_5A_2$, mivel egy oldaluk közös, egy-egy szögük a feltétel értelmében, A_5-nél és A_2-nél fekvő szögeik pedig, mint közös húron álló kerületi szögek egyenlők, a miből következik, hogy

$$A_5A_4 = A_2A_3.$$

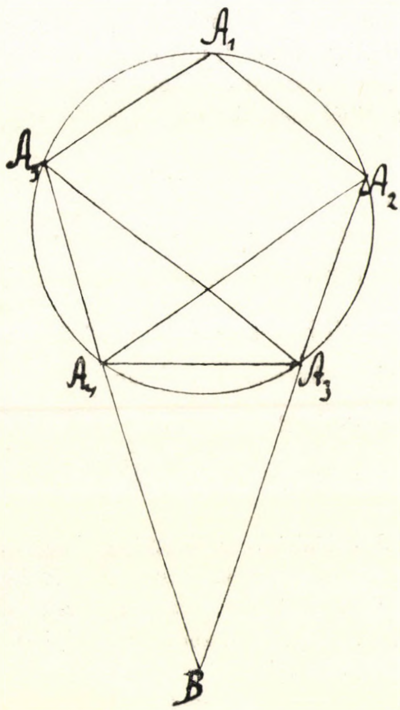
II. Bebizonyítandó, hogy az

$$1x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = a \qquad 1)$$

határozatlan egyenlet pozitiv és egész számokból álló megoldásainak száma ugyanakkora, mint az

$$1y_1+2y_2+\cdots+ny_n=a-\frac{n(n+1)}{2} \qquad 2)$$

egyenlet nem negatív egész számokból álló megoldásainak száma. Az a pozitiv egész számot jelent.



Legyen 1)-nek a feladat feltételeinek megfelelő megoldásainak száma A, és 2)-ben a feltételeknek megfelelő megoldások száma B. Legyen az

$$x_1=k_1,\ x_2=k_2, \ldots, x_n=k_n$$

értékrendszer 1)-nek gyökrendszere, ekkor

$$1k_1+2k_2+\cdots+nk_n=a.$$

Könnyen kimutatható, hogy ekkor az

$$y_1=k_1-1,\ y_2=k_2-1, \ldots, y_n=k_n-1$$

értékrendszer 2)-nek megoldása. U. i.

$$1(k_1-1)+2(k_2-1)+\cdots+n(k_n-1)=1k_1+2k_2+\cdots+nk_n-$$

$$-(1+2+\cdots+n)=a-\frac{n(n-1)}{2}\cdot \text{ (sic !)}$$

Tehát 1)-nek minden gyökrendszeréből kaphatunk egy oly értékrendszert, a mely 2)-nek gyökrendszere, és ha 1) gyökrendszerei egymástól különbözők, akkor 2)-nek belőlük nyert gyökrendszerei is különbözők egymástól. Ha ily módon 2)-nek összes gyökrendszereit meg tudjuk kapni 1) összes gyökrendszereiből, akkor $A=B$, ha ellenben 1) összes gyökrendszereiből nem kapjuk meg 2) összes gyökrendszereit, akkor $A<B$, vagyis

$$A \leq B. \qquad 3)$$

Legyen most az

$$y_1=l_1,\ y_2=l_2,\dots,y_n=l_n,$$

értékrendszer 2)-nek gyökrendszere, ekkor könnyen kimutatható, hogy az

$$x_1=l_1+1,\ x_2=l_2+1,\dots,x_n=l+1$$

értékrendszer 1)-nek gyökrendszere, miután

$$1(l_1+1)+2(l_2+1)+\cdots+n(l_n+1)=$$

$$=1l_1+2l_2+\cdots+nl_n+1+2+\cdots+n=a-\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=a.$$

2)-nek egymástól különböző értékrendszereiből tehát 1)-nek ugyanannyi egymástól különböző gyökrendszerét nyerhetjük. Ha 2) összes gyökrendszereiből 1)-nek összes gyökrendszereit megkapjuk, akkor $B=A$, ha ellenben ezen gyökrendszereken kívül 1)-nek még van gyökrendszere, akkor $B<A$, vagyis

$$B \leq A. \qquad 4)$$

4) a 3)-mal csak úgy hozható összhangzásba, ha

$$A=B,$$

a mivel tételünk bebizonyítást nyert.

III. Legyenek A_1A_2 és B_1B_2 az O középponttal biró kör átmérői; meghatározandó és geometriailag ábrázolandó ama P pontok összessége, a melyekre nézve

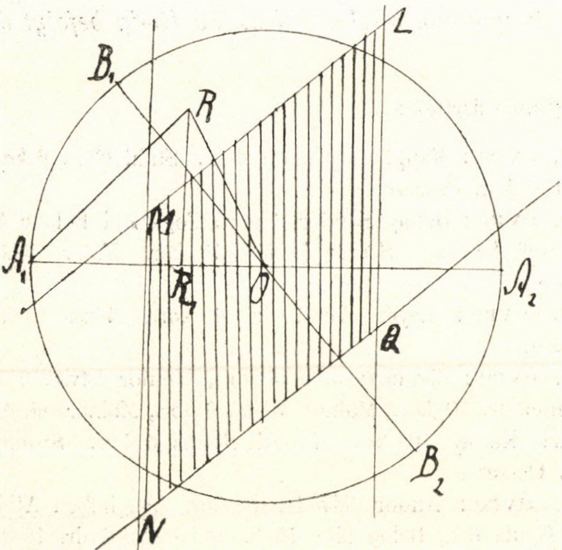
$$A_1P > OP,\ A_2P > OP,\ B_1P > OP,\ B_2P > OP$$

egyenlőtlenségek egyszerre állanak fenn.

Állítsunk A_1O felezéspontjában A_1O-ra merőlegest, és vegyünk föl ezen merőlegesnek az O pont felé eső oldalán egy R pontot. R-ből bocsássunk A_1O-ra merőlegest, melynek talppontja R_1.

$$\overline{RO}^2 = \overline{RR_1}^2 + \overline{R_1O}^2 \quad \text{és} \quad RA_1 = \overline{RR_1}^2 + \overline{R_1A_1}^2, \quad (sic!)$$

és minthogy $R_1O < R_1A_1$, azért $\overline{RA_1}^2 > \overline{RO}^2$, vagyis $RA_1 > RO$. Ebből látjuk, hogy mindazon pontok, a melyek a merőlegesnek O pont felé



eső oldalán feküsznek, eleget tesznek az első egyenlőtlenségnek; teljesen hasonlóan kimutathatnók, hogy a merőlegesnek ellenkező oldalán fekvő pontok az első egyenlőtlenséget nem elégíthetik ki. Ugyancsak könnyű kimutatni, hogy a második, harmadik, negyedik egyenlőtlenségnek eleget tévő pontok az A_2O, B_1O, B_2O felezéspontjában A_2O, B_1O, B_2O-ra emelt merőlegeseknek az O pont felé eső oldalán feküsznek. Ennélfogva az összes egyenlőtlenségeket kielégítő pontok e négy merőleges által meghatározott $MNLQ$ parallelogrammban vannak.

Utalványczim: Math. és Phys. Társ. 5997. sz. cheque-számlájára.

Kimutatás

az 1904. év novemb. hó 1-től decz. hó 15-ig befolyt díjakról.

Tagsági díjat fizettek:

1900. évre: Kappel György 6 kor., Stáhl Géza 6 kor., Széchy Ágost 6 kor. Összesen ... 18 kor.

1901. évre: Dobay Sándor 6 kor., Fogarassi Béla 6 k., Nuricsán József 10 kor., Szerényi Géza 10 kor., Tatár Balázs 6 kor. Összesen ... 38 kor.

1902. évre: Layer Antal dr. 6 kor., Rózsa István 6 kor. Összesen ... 12 kor.

1903. évre: Cholnoky Jenő 3 kor., Homor István 6 k., Kemény Ferencz dr. 10 kor., Molnár Aladár 6 kor., Molnár Sándor 6 kor., Oberle Károly 10 kor., Pizetti Rokus 6 kor., Strompf László 6 kor. Összesen ... 53 kor.

1904. évre: Andor Tivadar 10 kor., Angheben Albin 6 kor., Baló Gyula 6 k., Balog Mór 10 k., Beke Manó dr. 10 k., Benko Imre 6 kor., Bihary Ferencz 6 kor., Bodor Domonkos 6 kor., Borossay Dávid 6 k., Bricht Lipót 10 k., Bruck Ferencz 10 kor., Bruckner Károly 10 k., Bugarszky István 10 k., Csemez József 10 kor., K. Danch Ferencz 6 kor., Dietz E. Lajos 10 k., Edelmann Sebő dr. 6 kor., Emszt Kálmán dr. 10 kor., Erdődy Imre 10 kor., Faragó Andor 6 kor., Ferenczy József 6 k., Fettl Lipót 10 kor., ifj. Füzy Rezső Vilmos 10 k., Gerecz Lajos 6 k., Groo Vilmos 6 kor., Halmi János 6 kor., Hauser Ignácz 6 kor., Hlatky Miklós 6 kor., Horváth József dr. 6 kor., Hubatsek Alajos 10 kor., Juckel Gyula dr. 10 kor., Kántor Nándor 6 kor., Kalecsinszky Sándor 10 kor., Kármán Ferencz 10 kor., Király László 6 kor., Klimkó Mihály 6 kor., Kovács Ferencz 6 kor., Kovács János dr. 10 kor., Kúthy József dr., 6 kor. Lóczy Lajos dr. 10 kor., Marcsiss János 6 kor., Medvigy János 6 kor., Melczer Gusztáv dr. 10 kor., Novothny Endre 6 kor., Pantea Jenő 6 kor., Pap Lajos 6 kor., Payer Jenő 10 kor., Péch Aladár 10 kor., Perjessy László 6 kor., Pfeifer Péter dr. 6 kor., Plischka Norbert

6 kor., Privorszky Alajos 6 kor., Renner János 6 kor., Seidner Mihály 10 kor., Scholtz Ágost dr. 10 kor., Skopal István 10 kor., Steécz György dr. 6 kor., Steiner Miklós 6 kor., Szekeres Kálmán dr. 7 kor., Szentmiklósy Jenő 6 kor., Szépréthy Béla 6 kor., Szirtes Ignácz 4 kor., Tokaji Aladár 6 kor., Tangl Károly dr. 6 kor., Vidovich Béla 6 kor., Walther Béla 6 kor., Winter Jószef 10 kor., Zettner Ede 10 kor. Összesen ... 511 kor.

1905. évre: Pap János ... 10 kor.

Előfizetési díjat fizettek:

1904. évre: Budapesti áll. polg. iskolai tanitóképző 10 kor., Budapesti magyar kir. orsz. meteorologiai int. 10 kor., Dévai áll. főreáliskola 10 kor., Eötvös Collegium 10 kor., Késmárki ág. hitv. ev. lyceum 10 kor., Temesvári áll. főgymn. 10 k., Temesvári fels. leányisk. 10 kor., Ungvári áll. főgymn. 10 kor. Összesen ... 80 kor.

1905. évre: Budapesti «Norbertinum» 10 kor., Temesvári fels. leányisk. 10 kor. Összesen ... 20 kor.

Összesen befolyt:

Hátralékokból ...	121.— kor.,	január 1-től ...	719.— kor.
f. és 1905. évi díjból ...	521.— «	« « ...	2210.— «
Előfizetési díjakból ...	100.— «	« « ...	842.— «

Sajtóhiba igazítás: A Math. és Phys. Lapok 1904. évf. 6. számában közölt «Kimutatás»-ban az 1904. évi tagdijat megfizetők nevei közül kimaradt: Jenei Pál és Molnár Szaniszló, de az általuk fizetett 6—6 kor. a végösszegbe be volt számitva, továbbá Rigó Ferencz nem 6 kor., hanem 10 kor. fizetett, tehát a végösszeg ennek megfelelőleg 1689. koronára igazitandó.

Kelt Budapesten, 1904. decz. 16.

Feichtinger Győző
pénztárnok.
(VII., Aréna-út 15.)